Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math.-Naturwiss. R.
34 (1985) 6, 580–582

Eine Bemerkung über vollständig positive Abbildungen von Dichteoperatoren

Armin Uhlmann

Karl-Marx-Universität, Sektion Physik
und Naturwissenschaftlich-Theoretisches Zentrum
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz 10

Zusammenfassung: Ein einfaches Kriterium wird angegeben, durch vollständig positive Transformationen von Dichtematrizen in Dichtematrizen m-Tupel reiner Zustände aufeinander abbilden zu können.

Summary: We give a simple condition for the posibility of transforming m-tuples of pure states one onto another by means of completely positive and trace-preserving maps.

Quantenstatistik – Übergangswahrscheinlichkeit
квантовая статистика – вероятность перехода
quantum statistics – transition probability
statistique quantique – probabilité de transition

Wir wollen im folgenden ein Kriterium für die Existenz einer vollständig positiven Abbildung angeben, die Dichtematrizen in Dichtematrizen und endliche viele gegebene reine Zustände in andere gegebene reine Zustände transformiert. Hierzu legen wir zunächst die Bezeichnungen fest, nennen dann das Kriterium und beweisen es anschließend.

Ist $\mathbf{X}$ ein Hilbert-Raum, so sei $S(\mathbf{X})$ der lineare Raum der Operatoren der Spurenklasse über $\mathbf{X}$ und $Z(\mathbf{X})$ bezeichne die Menge der Dichteoperatoren, also der positiv semidefiniten Operatoren mit Spur 1 der Spurenklasse. Sind $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ zwei Hilbert-Räume, so betrachten wir vollständig positive Abbildungen von $S(\mathbf{X})$ in $S(\mathbf{Y})$, die die Spur invariant lassen und somit auch $Z(\mathbf{X})$ in $Z(\mathbf{Y})$ abbilden. Solche Abbildungen können als Verallgemeinerungen der stochastischen Matrizen aufgefaßt werden [2]. Die vollständige Positivität im Sinne von *Stinespring* und *Umegaki* wird in physikalischen Anwendungen durch das Überlagerungsprinzip der Quantenphysik erzwungen. Nach [3] kann jede vollständig positive und spurerhaltende Abbildung von $S(\mathbf{X})$ in $S(\mathbf{Y})$ in die Form

$$D \to T(D) = \sum A_j D A_j^* \tag{1}$$

gebracht werden, wobei die A_k lineare Abbildungen von $\mathbf{X}$ in $\mathbf{Y}$ sind, die der Bedingung unterliegen:

$$\sum A_j^* A_j = \mathrm{id}_{\mathbf{X}}. \tag{2}$$

Seien nun $x_1, \ldots, x_m$ bzw. $y_1, \ldots, y_m$ normierte Vektoren von $\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{Y}$ und seien $P_1, \ldots, P_m$ bzw. $Q_1, \ldots, Q_m$ die durch sie definierten eindimensionalen Projektoren.

Satz: Genau dann gibt es eine vollständig positive und spurerhaltende Abbildung T von $S(\mathbf{X})$ in $S(\mathbf{Y})$ mit

$$k = 1, \ldots, m: \qquad T(P_k) = Q_k, \tag{3}$$

wenn die Gramsche Determinante der x_i das Hadamard-Produkt der Gramschen Determinante der y_k mit einer positiv semi-definiten Matrix ist.

Werden also die Matrixelemente der in Rede stehenden positiv semidefiniten Matrix mit r_{jk} bezeichnet, so kann man die zu (3) äquivalente Bedingung

$$i, k = 1, \ldots, m: \qquad (x_i, x_k) = r_{ik}(y_i, y_k) \tag{4}$$

schreiben. Man sieht übrigens leicht, daß die Forderung nach Normierung der Vektoren lediglich das Formelbild im Beweis entlastet, sonst aber irrelevant ist. Es darf nur keiner der Vektoren die Null des entsprechenden Hilbert-Raumes sein.

Wir zeigen zunächst die Notwendigkeit von (4). Setzt man (3) in (1) ein, so wird jedesmal ein eindimensionaler Projektor Q_k als eine Summe positiver Operatoren dargestellt. Also ist jeder Summand ein Vielfaches von Q_k und $A_j^* P_k A_j = a_{jk} Q_k$. Hieraus folgt, da es sich um eindimensionale Projektoren handelt,

$$A_j x_k = s_{jk} y_k \quad \text{mit} \quad a_{jk} = |s_{jk}|^2. \tag{5}$$

Aus (5) und (2) aber folgt jetzt

$$(x_i, x_k) = \sum_j (A_j x_i, A_j x_k) = r_{ik}(y_i, y_k) \tag{6}$$

mit

$$r_{ik} = \sum \bar{s}_{ji} s_{jk}. \tag{7}$$

Gelte nun umgekehrt (4) mit einer positiv semidefiniten Matrix (r_{ik}). Dann gibt es eine Darstellung (7). Wir nehmen zunächst an, $\mathbf{X}$ sei von den Vektoren $x_1, \ldots, x_m$ erzeugt. Dann werden die linearen Abbildungen A_j von $\mathbf{X}$ in $\mathbf{Y}$ durch (5) und mit ihnen gemäß (1) die vollständig positive Abbildung T von $Z(\mathbf{X})$ in $Z(\mathbf{Y})$ definiert. Ist die Definition der A_j korrekt, so ist $A_j P_k A_j$ und somit auch $T(P_k)$ ein Vielfaches von Q_k. Um (3) zu zeigen, langt dann der Nachweis der Spurerhaltung von T, d. h. von (2).

Um die Definition der A_j als korrekt zu erkennen, betrachten wir eine beliebige Linearkombination $x = a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m$. Es ist

$$(A_j x, A_j x) = \sum \bar{s}_{ji} s_{jk} \bar{a}_i a_k (y_i, y_k) \tag{8}$$

und wegen (7) und (4)

$$(A_j x, A_j x) \leqq \sum r_{ik} \bar{a}_i a_k (y_i, y_k) = (x, x).$$

Also folgt aus $x = 0$ auch $A_j x = 0$ für jedes j. Damit ist die Existenz der A_j gesichert. Aufsummierung von (8) über j ergibt ferner, ebenfalls wegen (7) und (4),

$$\sum (x, A_j^* A_j x) = (x, x).$$

Daher gilt (2) und T ist spurerhaltend.

Schließlich haben wir noch den allgemeinen Fall zu betrachten, daß $x_1, \ldots, x_m$ einen Unterraum $\mathbf{X}_0$ von $\mathbf{X}$ erzeugt. Wir nennen dann T_0 die eben konstruierte Abbildung von $Z(\mathbf{X}_0)$ in $\mathbf{Y}$. Sei R der Projektionsoperator auf $\mathbf{X}_0$ und F beliebig aus $Z(\mathbf{Y})$ gewählt. Wir definieren dann

$$T(D) = (\mathrm{Sp.}\,(1 - R)\,D)\,F + (\mathrm{Sp.}\,RD)\,T_0(RDR). \tag{9}$$

Es ist dann klar, daß T vollständig positiv und spurerhaltend ist und überdies (3) befriedigt. Damit ist der Satz gezeigt.

Für eine kurze Diskussion führen wir eine Ad-hoc-Bezeichnung ein. Nennen wir eine Matrix A „Hadamard-positiver" als B, wenn A als Hadamard-Produkt von B mit einer positiv semidefiniten Matrix geschrieben werden kann. Ist **A** eine unitale und reduzierte *-Algebra, so heißt einer ihrer Zustände strikt rein (oder rein vom Typ 1), wenn es in **A** einen hermitischen Projektor p derart gibt, daß $pap = u(a)\,p$ für alle Elemente a von **A** gilt. p ist dann der Träger von u. Sind $u_1, \ldots, u_m$ strikt reine Zustände von **A** und $p_1, \ldots, p_m$ ihre Träger, so gibt es in der Menge aller Matrizen

$$i, k \to u(p_i p_k), \quad i, k = 1, \ldots, m,$$

wobei u alle Zustände von **A** durchläuft, solche, die minimal im Sinne der Halbordnung „Hadamard-positiver als" sind. Diese Matrizen bilden die „Hadamard Klasse" der Zustände $u_1, \ldots, u_m$. Seien nun **A** und **B** zwei unitale reduzierte *-Algebren und $u_1, \ldots, u_m$ bzw. $v_1, \ldots, v_m$ zwei m-Tupel strikt reiner Zustände dieser Algebren. Es ist eine unmittelbare Folge obigen Zusammenhangs, daß die v_j genau dann simultan Bilder der u_j unter einer vollständig positiven, Zustände in Zustände überführenden Abbildung von $\mathbf{A}^*$ in $\mathbf{B}^*$ sind, wenn die Hadamard-Klasse der u_j Hadamard-positiver als die der v_j ist.

Sind jedoch z. B. $u_1, \ldots, u_m$ beliebiger Zustände von **A**, so gibt es zahlreiche Möglichkeiten, diese als reduzierte m-Tupel strikt reiner Zustände darzustellen (siehe z. B. [4]), die bezüglich geeigneter Erweiterungen von **A** definiert sind. Jede solche „Liftoperation" definiert eine minimale Hadamard-Klasse. Es ist anzunehmen, daß die Struktur der Menge aller dieser Hadamard-Klassen über die Möglichkeit entscheidet, m-Tupel beliebiger Zustände durch Transformationen des hier betrachteten Typs aufeinander abzubilden. Zu dieser Frage gibt es aber auch einen ganz anderen Zugang [1].

Literatur

[1] *Alberti, P. M.:* Vollständig positive Abbildungen und verallgemeinerte Übergangswahrscheinlichkeiten über atomaren W^*-Algebren. Wiss. Z. Karl-Marx-Univ., Math.-Naturwiss. R. *34* (1985) 572–579.

[2] –; *Uhlmann, A.:* Stochasticity and partial order. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1981.

[3] *Kraus, K.:* General state changes in quantum theory. Ann. Phys. (N. Y.) *64* (1971) 311–323.

[4] *Uhlmann, A.:* The transition probability for states of *-algebras. Ann. Phys. *42* (1985) in press.