ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 26, № 1
январь, 1976

О НЕКОТОРОМ ОБОБЩЕНИИ НЕРАВЕНСТВ ГРИФФИТСА

А. Ульман

Данные в работе новые неравенства улучшают известные неравенства Гриффитса.

ВВЕДЕНИЕ

В этой статье выводятся неравенства для корреляционных функций моделей Изинга, которые можно считать как улучшающими (соотношения (11) и (13)), так и обобщающими (соотношение (10)) неравенства Гриффитса [2], Кэлей и Шермэна [1]. Такие неравенства широко применяются в теории фазовых переходов (см., например, [5]) и в евклидовой квантовой теории (см., например, [6]).

Пусть T — конечная решетка. Если фиксировать ориентацию спина «вверх» или «вниз» для каждого узла решетки, то получаем какую-то конфигурацию модели, которую можно описать подмножеством B от T. А именно, $t'\in B$, если и только если спин в узле решетки t' направлен вверх. Если S_t — спиновая функция в узле решетки t, то $S_t(B)=-1$, если $t\in B$, и $S_t(B)=+1$, если $t\notin B$.

Корреляционная функция — это среднее по Гиббсу произведения S_{t_1}, $S_{t_2},\ldots,S_{t_m}$. Коротко такое произведение записывается в виде S_A, где A — множество точек $t_1, t_2,\ldots,t_m$. Следовательно, корреляционная функция может рассматриваться как среднее по Гиббсу функции $B\to S_A(B)$, заданной на множестве X всех конфигураций B.

В случае, если энергия конфигурации тем меньше, чем больше число пар с антипараллельным спином и чем больше число спинов, направленных вниз, говорят, что взаимодействие ферромагнитного типа. Более подробно это будет описано при помощи уравнений (3) и (4).

Для удобства все константы включены в константы взаимодействия $J(A)$, например, $J(A)=\beta\hat{J}(A)$.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Мы начнем с введения обозначений, которые принадлежат Кэлей и Шермэну [1]. Пусть T — конечное множество, $t, t',\ldots$ — его точки. Обозначим через X множество всех его подмножеств (конфигурации) и определим для $A, B\in X$

$$S_A:\ B\to S_A(B)=(-1)^{|A\cap B|}, \tag{1}$$

где число точек в множестве A обозначается через $|A|$. Тогда известно, что

(2) $$S_A(BG)=S_A(B)S_A(G),\quad S_{AB}(G)=S_A(G)S_B(G),$$

где $AB\overset{\text{def}}{=}(A\cup B)\diagdown(A\cap B)$.

Для каждой положительной функции

(3) $$J: A\to J(A)\geqslant 0,\quad A\in X$$

(константы взаимодействия ферромагнитного типа) мы построим гамильтониан, матрицу плотности и среднее

(4) $$H_J=-\sum_B J(B)S_B,$$

(5) $$d_J=\exp\{-H_J\},$$

(6) $$\langle S_A\rangle_J=\frac{\sum\limits_B S_A(B)d_J(B)}{\sum\limits_B d_J(B)}.$$

Тогда неравенства Гриффитса запишутся в виде [1—4]

(7) $$\langle S_A\rangle_J\geqslant 0,$$

(8) $$\langle S_AS_B\rangle_J-\langle S_A\rangle_J\langle S_B\rangle_J\geqslant 0.$$

2. ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ГРИФФИТСА

Утверждение. Пусть A, $A_1,\ldots,A_m$ — *произвольные конфигурации из* X *и* $J_1,\ldots,J_m$ — *произвольные положительные функции* (3) *и положим*

(9) $$J=J_1+J_2+\ldots+J_m.$$

Тогда справедливо неравенство

(10) $$\left\langle S_A\prod_{k=1}^{m}\{S_{A_k}-\langle S_{A_k}\rangle_{J_k}\}\right\rangle_J\geqslant 0.$$

3. ЗАМЕЧАНИЯ

1. Если мы положим $m=1$ в (10), то получим (8), т. е. второе неравенство Гриффитса.

2. В случае $m=2$ и для $A=A_1=A_2$ получим

(11) $$\langle S_A\rangle_{J_1+J_2}\geqslant\frac{\langle S_A\rangle_{J_1}+\langle S_A\rangle_{J_2}}{1+\langle S_A\rangle_{J_1}\langle S_A\rangle_{J_2}}.$$

Это неравенство сильнее, чем (8), потому что (8) равносильно тому факту, что (6) является возрастающей функцией относительно J.

3. Поскольку

$$x,y\to\frac{x+y}{1+xy},\qquad |x|\leqslant 1,\qquad |y|\leqslant 1,$$

является умножением однопараметрической группы, удобно ввести канонический параметр ξ. Положим

(12) $$\xi_A(J)=\ln\frac{1+\langle S_A\rangle_J}{1-\langle S_A\rangle_J}.$$

Из (11) следует

(13) $$\xi_A(J_1+J_2)\geqslant\xi_A(J_1)+\xi_A(J_2),$$

а отсюда, конечно, и неравенство

(14) $$\xi_A\left(\sum J_i\right)\geqslant\sum\xi_A(J_i).$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ПО ЖИНИБРУ [3])

Сначала заметим, что X относительно выражения $AB=(A\cup B)\diagdown(A\cap B)$ (симметричной разности) является группой. Введем вспомогательные величины

(15) $$q_j=\sum_B\{d_j(B)S_{A_j}-d_j(B)S_{A_j}(B)\},\qquad d_j=d_{J_j}.$$

Нужно доказать, что $\langle S_Aq_1q_2\dots q_m\rangle_J\geqslant0$, т. е.

(16) $$0\leqslant\sum_{B,B_1,\dots,B_m}S_A(B)\prod_{j=1}^{m}\{S_{A_j}(B)-S_{A_j}(B_j)\}d_J(B)d_1(B_1)\dots d_m(B_m).$$

Произведем подстановку: $B\to B$, $B_1\to BB_1,\dots,B_m\to BB_m$. Тогда сумма (16) не меняется, потому что X является группой по симметрической разности. После использования (2), как это сделал Женибр, мы увидим, что (16) равносильно неравенству

(17) $$0\leqslant\sum_{B,B_1,\dots,B_m}\prod_{j=1}^{m}\{1-S_{A_j}(B_j)\}S_{AA_1\dots A_m}(B)d_J(B)d_1(BB_1)\dots d_m(BB_m).$$

Поэтому мы докажем утверждение (10), если только для каждого набора $A,A_1,\dots,A_m,B_1,\dots,B_m\in X$ справедливо неравенство

$$0\leqslant\sum_B S_{AA_1\dots A_m}(B)d_J(B)d_1(BB_1)\dots d_m(BB_m).$$

Но это неравенство — первое неравенство Гриффитса, если установить, что для каждого набора $B_1,\dots,B_m\in X$ матрица плотности

(18) $$\tilde{d}:\ B\to\tilde{d}(B)=d_J(B)d_1(BB_1)\ \dots\ d_m(BB_m)$$

является матрицей плотности ферромагнитного типа. А это действительно так, поскольку из (9) следует, что

$$\tilde{d}(B)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_G J_k(G)\,[S_G(B)+S_G(B)S_G(B_k)]\right\},$$

и очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{m}J_k(G)\,[1+S_G(B_k)]\geqslant0.$$

Итак мы доказали наше утверждение.

5. ДВА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВА

Следуя идее, предложенной В. А. Загребновым, мы можем воспользоваться в выражении (17) тем обстоятельством, что $1-S_A(B)\leqslant 2$, и получить в неравенствах оценки сверху. При условии (9) и для случая $n<m$ это нам дает

$$\left\langle S_A \prod_{k=1}^{m} \{S_{A_k} - \langle S_{A_k}\rangle_{J_k}\} \right\rangle_J \leqslant 2^{m-n} \left\langle S_A \prod_{k=1}^{n} \{S_{A_k} - \langle S_{A_k}\rangle_{J_k}\} \right\rangle_J . \tag{19}$$

Более того метод, которым было доказано (10), можно использовать для того, чтобы показать, что

$$\left\langle S_A \prod_{k=1}^{m} \{S_{A_k} + \lambda_k \langle S_{A_k}\rangle_{J_k}\} \right\rangle_J \geqslant 0 \tag{20}$$

для любого из чисел $-1\leqslant\lambda_k\leqslant+1$. Однако неравенства (19) и (20) для случая $\lambda_k\neq-1$ являются нетривиальными только тогда, когда $m\geqslant 2$.

В заключение я хочу поблагодарить В. А. Загребнова за интересные и ценные обсуждения.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
13 июня 1975 г.

Литература

[1] D. Kelly, S. Sherman. J. Math. Phys., **9**, 466, 1968.
[2] R. Griffiths. J. Math. Phys., **8**, 478, 484, 1967; Commun. Math. Phys., **9**, 121, 1967.
[3] J. Ginibre. Phys. Rev. Lett., **23**, 828, 1969.
[4] J. Ginibre. Commun. Math. Phys., **16**, 310, 1970.
[5] Д. Рюэль. Статистическая механика, «Мир», 1971.
[6] B. Simon. Euclidean Quantum Field Theory, Princeton, 1974.

ON SOME GENERALIZATION OF THE GRIFFITHS INEQUALITIES

A. Uhlmann

The new inequalities presented improve the known Griffiths inequalities.

Адрес редакции: 117333, Москва, В-333, ул. Вавилова, 42, тел. 135-20-19

Зав. редакцией Т. В. Рогозкина

Технический редактор *Т. В. Ванкова*

Сдано в набор 30/X-1975 г. Т-19327 Подписано к печати 25/XII—1975 г. Тираж 1100 экз.
Зак. 3023 Формат бумаги 70×108 1/16 Усл. печ. л. 12,6 Бум. л. 4 1/2 Уч.-изд. л. 11,6

2-я типография издательства «Наука», Москва, Шубинский пер., 10