

Es sei $F_{\delta,n} = \{f(x_1, \dots, x_n), S(f) \leq \delta \cdot 2^n\}$ ($\delta \geq 1$).

Satz 1. Zu jedem δ läßt sich eine Zahl δ' angeben, derart, daß $L(F_{\delta,n}) \leq \delta' \cdot n$ gilt. Mit anderen Worten, die Funktionen aus $F_{\delta,n}$ lassen sich in bezug auf die Anzahl der Veränderlichen mit linearer Kompliziertheit realisieren. (Dieser Satz war eine Hypothese von Jablonski.)

Es sei $T_{\gamma,n} = \{f(x_1, \dots, x_n), S(f) \leq \gamma \cdot 2^n\}$ ($0 < \gamma \leq 1$).

Satz 2. Es existiert eine stetige Funktion $B(\gamma)$ derart, daß für fixiertes γ $L(T_{\gamma,n}) \sim \rho B(\gamma) \frac{2^n}{n}$ gilt.

Die Funktion $B(\gamma)$ läßt sich effektiv durch ihre Umkehrfunktion $A(\gamma)$ bestimmen, welche folgendermaßen definiert ist:

$$A(\gamma) = \frac{2}{3} \gamma_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2^{\sigma_i}}{3^i} \gamma_i. \text{ Hierbei sind die } \gamma_i \text{ die Koeffizienten von } \gamma \text{ in der Dualschreibweise und } \sigma_i = i - \sum_{p=1}^{i-1} \gamma_p.$$

Literatur

- [1] Лупанов О.Б., Об одном классе схем из функциональных элементов, Сб. "Проблемы кибернетики", вып.7, М. Физматгиз, 1961, 60-II4.
- [2] Лупанов О.Б., Об одном подходе к синтезу управляющих систем - принципе локального кодирования. Сб. "Проблемы кибернетики", вып. 14, М. Физматгиз, 1965, 31-II0.
- [3] Улиг Л., О связи между сложностью схемной реализации функций алгебры логики и числом их подфункций. Сб. "Проблемы кибернетики", вып. 26.
- [4] Яблонский С.В., Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем. Сб. "Проблемы кибернетики", вып. 2, М. Физматгиз, 1959, 75-II1.
- [5] Shannon C.E., The synthesis of two-terminal switching circuits, Bell Syst. Techn. J. 28, I, 1949, 59 - 98.

U h l m a n n , Armin, Leipzig

Einige mathematische Strukturen in der Elementarteilchentheorie

1. Eine der Besonderheiten, die beim Zusammentreffen von Quanten und Relativitätstheorie eintritt, ist das Vorhandensein unbeschränkt vieler Freiheitsgrade. Ihr Wachstum mit der Energie ist

besonders eindrucksvoll: Erstens wächst die Anzahl der elementaren Teilchen und ihrer inneren Freiheitsgrade mit der Ruhemasse sehr stark (möglicherweise exponentiell). Zweitens wird in einem hochenergetischen Stoß zweier Teilchen fast jede denkbare Kombination aus gleichen oder anderen Teilchen mit einer von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit erzeugt, wenn die kinetische Energie des Stoßes so groß ist, daß gemäß dem Einsteinschen $E = mc^2$ das für ihre Erzeugung notwendige Energieäquivalent zur Verfügung steht. ("Fast": bis auf Erfüllung einiger Erhaltungssätze.) Bei niedrigeren Energien treten diese Freiheitsgrade als virtuelle oder Zwischenzustände auf und bedingen Korrekturen höherer Ordnung ("Vakuumpolarisation", "Anomales magnetisches Moment" u. a.). Ähnliche Probleme treten auch bei der Bildung des thermodynamischen Limes in der Statistischen Physik auf und bedingen auch hier quantenfeldtheoretische Methoden.

2. Die Unbeschränktheit der Zahl der Freiheitsgrade bewirkt im Zusammenspiel mit anderen Gegebenheiten der Quantentheorie ein stark singuläres Verhalten der entsprechenden mathematischen Objekte, Gleichungen usw. und führt u. a. dazu, daß bisher nicht einmal die Existenz einer nicht-trivialen Streumatrix oder einer Quantenfeldtheorie mit genügend nicht-trivialer Wechselwirkung mathematisch gesichert werden konnte.

3. Zum Aufbau einer Theorie der Elementarteilchen wurden bisher zwei Hauptwege beschritten, den der Quantenfeldtheorie und den der Streumatrixtheorie. Zum Verständnis dieser Wege denke man an die nicht-relativistische Potentialstreuung: Der erste Weg entspricht der Vorgabe eines Potentials (Wechselwirkung!) und besteht in der Lösung der Schrödingergleichung sowie in der Untersuchung der asymptotischen Eigenschaften ihrer Lösungen. Der zweite verallgemeinert die asymptotischen Eigenschaften der Lösungen der Schrödingergleichung für eine physikalisch relevante Klasse von Potentialen, ohne letzteres für den jeweiligen Prozeß genau zu kennen. Diese allgemeinen Eigenschaften (analytische und Symmetriebedingungen) werden dann zur Grundlage eines Axiomensystems für den Streuoperator genommen. Nach meiner persönlichen Überzeugung ist der quantenfeldtheoretische Weg grundsätzlicher. Der S-Matrix-Zugang bringt jedoch den großen Vorteil des direkten

Vergleichs mit dem Experiment und der Variation der theoretischen Ansätze nach experimentellen Erfordernissen.

Im folgenden skizzieren wir nur den Aufbau der Axiome der Quantenfeldtheorie.

4. Grundlegend für die Physik sind die Begriffe "Zustand" und "Observable" eines physikalischen Systems, die erst durch ihr Zusammenwirken einen nachprüfbaren Inhalt erhalten. Ist f ein Zustand eines Systems und A eine Observable, so liefert uns das Experiment nach den Regeln der Quantentheorie den Erwartungswert $f(A)$. Danach ist eine Messung ein Verfahren, "sehr viele" Systeme, die sich alle im Zustand f befinden mögen, der Meßvorschrift A zu unterwerfen. Sind a_1, a_2, \dots die individuellen Meßwerte, die mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots auftreten, so ist das gewichtete arithmetische Mittel, falls es existiert, nach Definition der Erwartungswert des Zustandes f bezüglich der Observablen A .

5. Gegenwärtig erscheint es am einfachsten, von den Observablen auszugehen, um geeignete mathematischen Strukturen zu finden. Sind A und B Observable, so fordert man die Existenz einer Observablen C mit $f(C) = f(A) + f(B)$ für alle f und schreibt $C = A + B$. A^2 soll diejenige Observable sein, die mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeitsverteilung die Meßwerte $(a_j)^2$ an Stelle der a_j (siehe 4) besitzt. $f(A^2)$ darf daher niemals negativ sein. Die Notwendigkeit der Sicherung des Überlagerungsprinzips und die Erfahrungen an konkreten Fällen führen auf folgendes:

5.1. Man nehme eine Algebra R , d. h. einen Ring über dem Körper der komplexen Zahlen, eine Involution $A \rightarrow A^*$ in R , die den Übergang zum hermitisch konjugierten Operator in einem Hilbertraum nachbildet. Die bezüglich der Involution hermitischen Elemente einer geeigneten solchen $*$ -Algebra R bilden das mathematische Modell einer Observablenmenge.

5.2. Sei R eine $*$ -Algebra mit Einselement E . Ein Zustand f von R ist ein positives normiertes lineares Funktional über R :

$$f(E) = 1, \quad f(A^*A) \geq 0, \quad \text{alle } A \in R.$$

Damit eröffnet sich folgender allgemeine Weg: Einem physikalischen System ist eine $*$ -Algebra R derart zuzuordnen, daß die hermitischen Elemente von R die Observablen und die Zustände von R die

physikalischen Zustände beschreiben.

Aus Gründen der mathematischen Handhabbarkeit betreffen die meisten physikalischen Anwendungen die Klasse der C^* -Algebren, obwohl wichtige Observable unbeschränkten Operatoren entsprechen. Grenzfall der klassischen Physik: kommutative Algebren.

6. Das genannte Vorgehen läßt sofort zwei physikalisch wichtige mathematische Richtungen mit reicher physikalischer Interpretation und Erfahrung erkennen.

/ Die irreduziblen symmetrischen Darstellungen von R realisieren das Überlagerungsprinzip der Quantenphysik, nachdem die Observablen als (selbstadjungierte) Operatoren eines Hilbertraumes auffaßbar sein sollen. (Jeder Zustand induziert eine zyklische Darstellung von R und umgekehrt, sog. GNS-Darstellung nach Segal, Gelfand, Neumark.)

/ Die Zustände von R bilden eine konvexe Menge. Die Bildung konvexer Linearkombinationen entspricht der "Mischung" von Zuständen im Sinne von Gibbs und von Neumann. Die Extrempunkte bezeichnen die "reinen" Zustände. Sie induzieren irreduzible Darstellungen. Im Gegensatz dazu sind Gleichgewichtszustände unter gegebenen Bedingungen (z. B. fester Erwartungswert für Energie und Teilchenzahl) "maximal gemischt" im Sinne der Entropiebewertung.

7. Das in 6 und 5 dargelegte Schema bedarf der Ergänzung durch weitere physikalische Forderungen, die u. U. einen Teil der Zustände der Algebra als unphysikalisch ausscheiden.

In diesem Sinne folgt die Besprechung einiger für die relativistische Quantenfeldtheorie typischer Axiome.

7.1. In R soll eine Gruppe G von symmetrischen Automorphismen ausgezeichnet sein, die der physikalischen Symmetriegruppe isomorph ist. G enthalte die Translationen des E^4 und die die Form der Signatur $(+---)$ invariant lassenden Transformationen des E^4 (Lorentztransformationen). Der mit der entsprechenden Metrik versehene 4-dimensionale Zahlenraum heißt Minkowskiraum.

7.2. Jeder offenen Menge M des Minkowskiraumes ist eine $*$ -Unteralgebra $R(M)$ von R zugeordnet, die die "Lokalisierung" der Observablen bzw. des Feldes kennzeichnet.

Das System der Unteralgebren mit beschränktem M soll eine in R "dicht" liegende Algebra erzeugen. Weiter soll $R(M) \subseteq R(N)$ für $M \subseteq N$ sein. Führt eine im Sinne von 7.1. zulässige Raumtransformation M in M' über, so soll der entsprechende Automorphismus $R(M)$ in $R(M')$ überführen. Diese Struktur ist der allgemeine Feldbegriff im Sinne der Quantenfeldtheorie.

7.3. Spektralität. Die Translationen des Minkowskiraumes besitzen eine Basis aus vier Erzeugenden, die zueinander orthogonal und entsprechend der Signatur gewählt werden können: ein zeitartiger Vektor P_0 und drei raumartige Vektoren P_k . Die Darstellungen von R (siehe 6) müssen so gewählt werden, daß G als unitäre, die Automorphismen reproduzierende Gruppe aufgefaßt werden kann. Die Spektren von P_0 (= Energie) und $P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2$ (= Quadrat der Ruhemasse) müssen auf der positiven Halbachse liegen.

7.4. Kausalität. Vorgänge, zu deren Auslösung Überlichtgeschwindigkeit notwendig wäre, finden nicht statt. Dies wird so übersetzt: Seien M und M' zwei Gebiete des Minkowskiraumes, die raumartig zueinander liegen. Die in 6 geforderte Darstellung muß so gewählt werden, daß die Darstellungen von $R(M)$ und $R(M')$ vertauschen (elementweise).

8. Um eine genügend genaue und möglichst aussagekräftige Formulierung zu erreichen, müssen die Algebra und der Raum der Zustände mit einer geeigneten Topologie versehen werden. Siehe hierzu den Vortrag von G. Laßner. Es versteht sich außerdem, daß die obigen Forderungen in verschiedener Weise abgeändert werden können. Die Wahl der Algebra R für ein gegebenes physikalisches System ist meist ebenfalls eine nicht-triviale Aufgabe.

Das Interesse an mathematischen Fragestellungen aus dem Bereich der Naturwissenschaften liegt an ihrer besonderen "von der Natur getroffenen" Auswahl. Die physikalische Interpretation mathematischer Begriffe kann von großer heuristischer Kraft sein.

Literatur

- Res Jost, The general theory of quantized fields, Providence 65
 R.F. Streater, A.S. Wightman, PCT, Spin and Statistics and all that. Benjamin 1964
 N.N. Bogoljubov, A.A. Logunov, U.T. Todorov, Der axiomatische Weg zur Quantenfeldtheorie (russisch), Moskau 1969
 D. Ruelle, Statistical Physics, rigorous results, Princeton 1967
 256

U l m , Sulev, Tallinn

Funktionalanalytische Methoden in der angewandten Mathematik

Die Theorie der Näherungsmethoden für die Lösung verschiedener mathematischer Aufgaben ist in der Gegenwart ein untrennbarer Teil der Funktionalanalysis, der es möglich macht, diese Methoden in einer abstrakten allgemeinen Form zu behandeln. Zum Beispiel, statt die bestimmten Klassen der nichtlinearen Gleichungssysteme oder der Integralgleichungen einzeln zu betrachten, erforscht die Funktionalanalysis die allgemeinen Operatorgleichungen und wendet die Resultate für die konkreten Typen der Gleichungen an. Dank der Funktionalanalysis hat man in der Theorie der Näherungsmethoden eine Reihe von grundlegenden Resultaten erzielt, z. B. allgemeine Theorien der Differenzenmethoden, der Lösung der nichtkorrekten Aufgaben, der Projektionsmethoden, die Theorie der Näherungsmethoden von allgemeinen linearen Operatorgleichungen usw. Im Vortrag werden diese Theorien kurz charakterisiert. Es wird die Anwendung der funktionalanalytischen Methoden für die zwei großen Aufgabenklassen eingehend behandelt:

1. die genäherte Lösung der allgemeinen nichtlinearen Operatorgleichungen (Iterationsverfahren);
2. die genäherte Lösung der Optimierungsaufgaben (Extremwertaufgaben mit Restriktionen).

1) Es seien X und Y Banach-Räume. Der nichtlineare Operator F sei in X definiert, die Bilder $F(x)$ seien Elemente von Y . Für die genäherte Lösung der Gleichung

$$F(x) = 0 \quad (1)$$

ist das Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n) \quad (2)$$

gut bekannt. Dieses Verfahren hat eine genügend große Konvergenzgeschwindigkeit ($k = 2$), aber seine Anwendung in der Praxis ist oft doch schwer:

- a) man muß die Ableitung $F'(x)$ berechnen;
- b) man muß bei jedem Iterationsschritt ($n = 0, 1, \dots$) eine lineare Operatorgleichung lösen;