Über die Wightman - Konstruktion

von A. Uhlmann, Leipzig
Theoretisch-Physikalisches Institut der Karl-Marx-Universität

1.

Einer der Gründe für die mathematischen Schwierigkeiten in der Quantentheorie, besonders in der Quantenfeldtheorie, ist das Auftreten unbeschränkter Operatoren. Ein unbeschränkter Operator A ist nicht auf dem ganzen Hilbert-Raum H der Zustandsvektoren definiert, sondern nur auf einer in H dichten linearen Mannigfaltigkeit D. Ist nämlich der selbstadjungierte Operator $A = A^*$ auf ganz H definiert, so ist er beschränkt. Es gibt dann eine reelle Zahl $\alpha > 0$ so, daß die zum Spektrum gehörenden Werte λ (also auch die Eigenwerte) absolut kleiner als α sind. Man sieht hieraus, daß bereits in der Quantenmechanik die Mehrzahl der Operatoren, die einer beobachtbaren Größe entsprechen, unbeschränkt sind. Man denke nur etwa an Energie-, Impuls-, Drehimpuls- oder Ortsoperatoren. Das Spektrum aller dieser Operatoren ist nicht beschränkt. Auch die in der Quantenfeldtheorie auftretenden Operatoren sind nur auf dichten Teilmengen des Hilbert-Raumes erklärt. Wenn wir daher von einem skalaren und hermitischen Quantenfeld $\varphi(x)$ sprechen, so gehört hierzu die Angabe derjenigen Vektoren des Hilbert-Raumes, auf denen die Schar der Operatoren $\varphi(x)$ definiert ist. Es stellt sich nun sogar heraus, daß die "Operatoren" $\varphi(x)$ auf überhaupt keinem Vektor von H direkt definiert sind. Man muß vielmehr die Operatoren mit Hilfe geeigneter Testfunktionen "verschmieren". Wir können daher die Bezeichnung $\varphi(x)$ nur als eine symbolische Kurzform für eine Reihe von Definitionen betrachten, die wir im folgenden darlegen. Diese Konstruktion wurde von Wightman [1] (siehe auch [2]) angegeben

Vortrag auf der Sommerschule f.Theor.Phys.d.Univ. Krakow, Juli 1963

und stützt sich auf mathematische Hilfsmittel aus der Theorie der Darstellung von Algebren (siehe z.B. [3]).

Wir betrachten endliche formale Summen

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots , \tag{1}$$

wobei f_0 eine Konstante, f_1 eine Funktion der Raum-Zeit-Punkte des Minkowski-Raumes, f_2 eine Funktion zweier Weltpunkte und so fort ist. Allgemein soll $f_j = f_j(x_1, \ldots, x_j)$ eine Funktion von j Raum-Zeit-Punkten $x_1, \ldots, x_j$ sein. Diese Funktionen sollen gewisse Regularitätseigenschaften besitzen. Wir können z.B. verlangen, daß sie beliebig oft differenzierbar sind und außerhalb einer (von der Funktion abhängenden) kompakten Punktmenge von Null verschieden sind. Eine andere Möglichkeit besteht in der Forderung, daß die f_j Testfunktionen für die gemäßigten Distributionen im Sinne von L. Schwartz sein sollen. Ist analog zu (1)

$$f' = f_0' + f_1' + f_2' + \cdots \tag{1'}$$

eine zweite endliche formale Summe von Funktionen $f_j' = f_j'(x_1, \ldots, x_j)$, so definieren wir

a) ihre Summe $f + f' = (f_0 + f_0') + (f_1 + f_1') + (f_2 + f_2') + \cdots ,$

b) ihre Multiplikation mit einer komplexen Zahl

$$\lambda f = \lambda f_0 + \lambda f_1 + \lambda f_2 + \cdots ,$$

c) ihre (nichtkommutative) Multiplikation

$$f \times f' = \sum_{n,m} f_n \times f_m' ,$$

wobei $f_0 \times f_m'$, $f_n \times f_0'$ die Multiplikation der Funktionen f_m' bzw. f_n mit der Konstanten f_0 bzw. f_0' ist und für

$$f_s \times f_r' = f_s(x_1, x_2, \ldots, x_s) \cdot f_r'(x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_{s+r}),$$

also eine Funktion von s+r Weltpunkten ist.

Durch diese Festlegungen wird die Gesamtheit der endlichen Summen (1) eine Algebra (ein nicht-kommutativer Ring, indem die Multiplikation mit komplexen Zahlen erklärt ist). Wir bezeichnen diese Algebra mit R.

Wir definieren nun in R eine "Involution": Ist f wie in (1) gegeben, so sei

$$f^* = f_0^* + f_1^* + f_2^* + \dots ,$$

wobei

$$f_0^* = \bar{f}_0 , \quad f_j^*(x_1, \dots, x_j) = \bar{f}_j(x_j, x_{j-1}, \dots, x_1)$$

ist. ($\bar{f}_j$ ist die zu f_j konjugiert-komplexe Funktion).

Es gilt

$$(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^* \quad , \quad (f + f')^* = f^* + f'^*,$$

$$(f \times f')^* = f'^* \times f^*.$$

In R wird schließlich noch eine Topologie (ein Konvergenzbegriff) eingeführt, der kurz wie folgt charakterisiert werden kann: Für die Funktionen f_n einer festen Variablenzahl 4n stimmt die Topologie mit der von L. Schwartz [4] für diese Funktionen im Zusammenhang mit der Distributionstheorie gegebenen überein. Die algebraischen Operationen von R seien stetig und die Topologie in R soll vollständig sein (jede Cauchy-Folge besitzt einen Limes).

3.

Ist T eine Distribution, so schreibt man symbolisch

$$T(g) = \int T(x)\, g(x)\, dx , \qquad (2)$$

wobei $T(g)$ der Wert von T für die Testfunktion g ist.
Wir sehen ganz analog dazu φ als eine Distribution an, deren "Werte" jedoch nicht Zahlen, sondern Operatoren sind. Genauer nehmen wir an, daß zu jedem $f \in R$ ein Operator $\varphi(f)$ gehört,

den wir symbolisch

$$\varphi(f) = f_0 \cdot \mathbf{1} + \int \varphi(x_1) f_1(x_1)\, d^4x_1 + \int \varphi(x_1)\varphi(x_2) f_2(x_1, x_2)\, d^4x_1\, d^4x_2 + \ldots$$

schreiben. ($\mathbf{1}$ ist der 1-Operator.)

Wenn wir für einen Augenblick vollkommen unbesorgt um mathematische Strenge rechnen, so finden wir leicht die Relationen

$$\varphi(f + f') = \varphi(f) + \varphi(f'), \tag{3,1}$$

$$\varphi(\lambda f) = \lambda\, \varphi(f), \tag{3,2}$$

$$\varphi(f \times f') = \varphi(f) \cdot \varphi(f'), \tag{3,3}$$

$$\varphi(f^*) = \varphi(f)^* \tag{3,4}$$

Z.B. Gleichung (3.4), bei der von $\varphi(x) = \varphi(x)^*$ Gebrauch gemacht wurde, erhalten wir so:

$$\varphi^*(f) = \left\{ \int \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) f_n(x_1, \ldots, x_n)\, d^4x_1 \ldots d^4x_n \right\}^*$$

$$= \int \varphi(x_n) \ldots \varphi(x_1)\, \bar{f}_n(x_1, \ldots, x_n)\, d^4x_1 \ldots d^4x_n$$

$$= \int \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)\, \bar{f}_n(x_n, \ldots, x_1)\, d^4x_1 \ldots d^4x_n = \varphi(f^*).$$

Wie bereits betont, wollen wir $\varphi(x)$ aber erst definieren. Wir könnten jedoch die Gl. (3) als definierende Relationen für ein Quantenfeld $\varphi(x)$ betrachten. Wenn wir an diesem Gedanken festhalten, so müssen wir uns sogleich an den Umstand erinnern, daß die Operatoren $\varphi(f)$ sicher unbeschränkt sein werden und daher zu jedem $f \in R$ der Definitionsbereich von $\varphi(f)$ angegeben werden muß. Dieser Notwendigkeit kommen wir durch die Forderung nach, daß eine Menge D von Vektoren aus H existieren soll, die im Definitionsbereich <u>jedes</u> Operators $\varphi(f)$ liegen sollen. Diese Menge D soll darüber hinaus noch folgende Eigenschaften besitzen. Bezeichnet Ω_0 den Vakuumzustand, dann sei

$$\Omega_0 \in D \,, \tag{4,1}$$

$$\varphi(f)\Omega \in D \quad \text{für alle} \quad \Omega \in D,\ f \in R. \tag{4,2}$$

In der Regel werden in einer Quantenfeldtheorie mehrere Felder zu betrachten sein. Nehmen wir aber der Einfachheit halber an, daß nur das in Rede stehende skalare, hermitische Feld $\varphi(x)$ vorhanden ist, so ergänzen wir unsere Forderung durch die weitere, daß D in H dicht liegt, wenn nur D die Gleichungen (4) erfüllt. Wir sagen dann, $\varphi(x)$ sei zyklisch mit Ω_0 als zyklischen Vektor. Unter den Teilmengen D von H, die im Definitionsbereich jedes Operators $\varphi(f)$ liegen und überdies (4.1) und (4.2) erfüllen, gibt es eine kleinste. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß zu jedem $\Omega \in D$ ein $f \in R$ mit $\Omega = \varphi(f)\Omega_0$ existiert. Von nun an verstehen wir unter D diese eindeutig bestimmte Menge von Vektoren aus H.

Wir können jetzt auch Gl. (3.4) präzisieren, indem wir sie

$$(\Omega_1, \varphi(f)\Omega_2) = (\varphi(f^*)\Omega_1, \Omega_2) \quad \text{für alle} \quad \Omega_1, \Omega_2 \in D \tag{3,4'}$$

lesen. Bedeutet $B_1 \subseteq B_2$ für zwei Operatoren wie üblich, daß B_2 eine Fortsetzung von B_1 ist, so können wir (3.4) genauer auch

$$\varphi(f^*) \subseteq \varphi(f)^* \tag{3.4''}$$

schreiben.

Die Definition des zyklischen, skalaren und hermitischen Quantenfeldes wird beendet, indem wir neben (3), (4) und der Zyklizität verlangen, daß die Linearform (das lineare Funktional)

$$\ell(f) = (\Omega_0, \varphi(f)\Omega_0) \tag{5}$$

auf R stetig im Sinne der Topologie von R ist. Betrachten wir speziell die "n-Punkt"-Testfunktionen $f_n(x_1, \ldots, x_n)$, so ist $f_n \to \ell(f_n)$ eine Distribution. Im Sinne von Gl. (2) können wir sie

$$\begin{aligned} \ell(f_n) &= (\Omega_0, \varphi(f_n)\Omega_0) = \\ &= \int (\Omega_0, \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\Omega_0) f_n(x_1, \ldots, x_n)\, d^4x_1, \ldots d^4x_n \end{aligned} \tag{6}$$

schreiben. Die Vakuumerwartungswerte

$$(\Omega_0, \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\Omega_0) = \langle \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\rangle_0 \tag{6'}$$

werden also als Distributionen aufgefaßt. Man sieht, daß die Linearform $\ell(f)$ über R durch die Vakuumerwartungswerte vollkommen bestimmt wird.

4.

Wir können nun das bisher Gesagte rückwärts verfolgen und sehen, daß die Struktur des linearen Funktionals $\ell(f)$ das Feld $\varphi(x)$ vollständig bestimmt. Mathematisch gesprochen ist $\varphi(x)$ die durch die Linearform $\ell(f)$ induzierte Darstellung der Algebra R durch unbeschränkte Operatoren in einem Hilbert-Raum. Wir wollen nun einige Schritte angeben, die nahelegen, wie aus der Linearform $\ell(f)$ die Vektormenge D und die Operatoren $\varphi(f)$ konstruiert werden. Aus der Gleichung (3) folgert man wegen (6)

$$\ell(\lambda f + \lambda' f') = \lambda\, \ell(f) + \lambda' \ell(f'), \tag{7,1}$$

$$\ell(f^\times) = \bar{\ell}(f), \tag{7,2}$$

$$\ell(f^\times \times f) \geq 0. \tag{7,3}$$

Eine Linearform, die (7) erfüllt, heißt <u>positiv</u>. Betrachten wir zunächst alle f aus R, für die $\varphi(f)\Omega_0 = \sigma$ ist. Wir bezeichnen diese Menge mit J. Aus (3) folgt leicht, daß J ein Linksideal von R ist: Mit f, f' ist auch $\lambda f + \lambda' f'$ in J und ist g aus R, f aus J, so ist $g \times f$ in J. Damit $f \in J$ ist, muß $(\varphi(f)\Omega_0, \varphi(f)\Omega_0) = \sigma$ sein und umgekehrt. Das aber heißt wegen

$$(\Omega_0, \varphi(f)^* \varphi(f)\Omega_0) = (\Omega_0, \varphi(f^*)\varphi(f)\Omega_0) = (\Omega_0, \varphi(f^* \times f)\Omega_0)$$

nichts anderes als

$$\ell(f^* \times f) = \sigma. \tag{8}$$

f gehört demnach genau dann zu J, wenn (8) erfüllt ist. Sei nun $\Omega \in D$ und $\Omega = \varphi(f)\Omega_0$. Genau dann ist auch $\varphi(f')\Omega_0 = \Omega$, wenn $f' - f \in J$ gilt. Die Elemente von D entsprechen also eineindeutig den "Restklassen" $f + J$ von R nach J. Wir können identifizieren

$$\Omega \equiv f + J \qquad \text{falls} \quad \varphi(f)\Omega_0 = \Omega \quad \text{ist.} \tag{9}$$

Wir sehen, daß J der Null von D und $1 + J$ dem Vakuumzustand entspricht. Ist weiter Ω nach (9) gegeben und $g \in R$, so ist

$$\Omega' = \varphi(g)\Omega \quad \text{definiert durch} \quad \Omega' = g \times f + J. \tag{10}$$

Die Restklassen $f + J$ bilden also eine lineare Mannigfaltigkeit, auf der die Operatoren $\varphi(f)$ wie durch (10) charakterisiert wirken.

Ist schließlich $\Omega' = f' + J$, so errechnet sich

$$(\Omega, \Omega') = (\varphi(f)\Omega_0, \varphi(f')\Omega_0) = (\Omega_0, \varphi(f^* \times f')\Omega_0) = \ell(f^* \times f').$$

Somit bestimmt die Linearform $\ell(f)$ die lineare Mannigfaltigkeit der zu D gehörenden Zustandsvektoren Ω, die Wirkung der Operatoren $\varphi(f)$ auf diese Vektoren und das Skalarprodukt. Die Vervollständigung von D bezüglich dieses Skalarproduktes liefert dann den Hilbert-Raum H.

Bemerkung: Wegen $\ell(1) = (\Omega_0, \Omega_0)$ ist der Vakuumzustand Ω_0 genau dann normiert, wenn $\ell(1) = 1$ ist.

5.

Soll nun das Feld $\varphi(x)$ einige (oder alle) Axiome der Quantenfeldtheorie erfüllen, so entspricht jedem dieser Axiome eine wohlbestimmte Eigenschaft von $\ell(f)$. Auf diese Weise kann man insbesondere die Forderung nach Lorentzinvarianz, Spektralität und Lokalität durch die Struktur von $\ell(f)$ ausdrücken. Wir verweisen hierzu auf die Literatur [1], [2].

6.

Wie wir sahen, entspricht der symbolischen Schreibweise für ein Quantenfeld ein ziemlich kompliziertes mathematisches Gebilde. Die symbolische Schreibweise ist dann von Vorteil, wenn man für sie in einwandfreier Weise Rechenvorschriften definieren kann. Als Beispiel erwähnen wir die direkte Summe von Quantenfeldern. Sind $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ zyklische Quantenfelder und $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ positive reelle Zahlen, so definieren wir das Quantenfeld

$$\varphi(x) = \lambda_1 \varphi_1(x) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x)$$

wie folgt: Entspricht die Linearform $\ell_j(f)$ dem Quantenfeld $\varphi_j(x)$, so werde $\varphi(x)$ durch die Linearform

$$\varphi(f) = \lambda_1 \varphi_1(f) + \dots + \lambda_m \varphi_m(f)$$

bestimmt. Man kann so auch unendliche direkte Summen und direkte Stieltjesintegrale von Quantenfeldern definieren.
Eine andere Rechenvorschrift, die eine Art von direkten Produkten von Quantenfeldern definiert, führt von den freien Feldern auf die sogenannten generalisierten freien Felder [5].
Das Problem der Angabe von Rechenregeln für Quantenfelder führt meist auf schwierige Probleme der Distributionstheorie, wie z.B. auf die Frage der Fortsetzbarkeit der linearen Form auf einen größeren Funktionsbereich als der durch R gegebene oder auf die Angabe einer Multiplikationsvorschrift für Distributionen.

Literatur:

[1] Wightman, A.S. Phys.Rev. 101 (1956) 860

[2] siehe z.B.

Haag, R., Nuovo Cim. Suppl. 14 (1959) 131

Wightman, A.S. Les Problèmes Mathematique de la Théorie Quantique des Champs. Lille 1957, p. 1-38

Borchers, H.-J. Nuovo Cim. 24 (1962) 214.

Uhlmann, A. Wiss.Z.Karl-Marx-Univ.Leipzig, 11 (1962) 213

[3] Neumark, M.A. Normierte Algebren.Berlin 1959 (bes. § 17).

[4] Schwartz, L. Théorie des distribution.Paris 1957, 1959.

[5] Greenberg,O.W. Ann. of Phys. 16 (1961) 158