

Als Manuskript gedruckt

Aus dem Theoretisch-Physikalischen Institut, Direktor: Prof. Dr. G. Heber

## Ein Blick auf einige Ergebnisse der axiomatischen Quantenfeldtheorie

Von A. UHLMANN

1

Wenn wir einem Teilchen  $A$  (z. B. einem Elektron, Proton,  $\eta$ -Meson) ein wechselwirkendes Quantenfeld  $A_k(x)$  zuordnen, so beschreibt dies in der Regel eine Vielzahl von Teilchen:

Wenden wir die Operatoren  $A_k(x)$  mehrfach auf den Vakuumzustand an, so finden wir als Resultat nicht nur die Streuzustände mehrerer Teilchen  $A$ . Es werden vielmehr auch alle die Teilchen vorkommen, die sich aus Teilchen der Sorte  $A$  „zusammensetzen“ lassen.

Wenn sich ein Teilchen  $B$  aus Teilchen der Sorte  $A$  zusammensetzen läßt, so sehen wir  $B$  weder „zusammengesetzt“, noch bezeichnen wir  $B$  als „elementarer“ als  $A$ ! Betrachten wir als ein Beispiel das Nukleonenfeld. Es beschreibt nicht nur Proton, Neutron und die zugehörigen Antiteilchen, sondern auch die  $\pi$ -Mesonen, das Deuteron sowie alle Atomkerne und ihre angeregten Zustände.

Dieses Verhalten weist die wechselwirkenden Quantenfelder als so komplizierte Objekte aus, daß selbst der mathematische Existenzbeweis für nichttriviale Fälle den Rahmen unserer heutigen Möglichkeiten offenbar beträchtlich übersteigt.

Betrachten wir nun eine Menge von Quantenfeldern, die wir  $A_k(x)$  schreiben, wobei der Index  $k$  sowohl die verschiedenen Felder als auch die inneren Freiheitsgrade (Spin, unitärer Spin usw.) unterscheidet. Die Annahme ist einleuchtend, daß man „alle“ Teilchen mit Hilfe der Felder  $A_k(x)$  genau dann beschreiben kann, wenn man aus ihnen alle Operatoren des Hilbert-Raumes der Zustände aufbauen kann. Die Menge der  $A_k(x)$  heißt dann irreduzibel. Man kann auch sagen, daß  $A_k(x)$  irreduzibel ist, wenn die Vielfachen der Identität die einzigen mit allen  $A_k(x)$  vertauschbaren Operatoren sind.

Nach Wightman, dem man die mathematische Begründung des Begriffes „Quantenfeld“ verdankt, sind die  $A_k(x)$  Distributionen, deren Werte unbeschränkte Operatoren sind. Deshalb treffen wir auf Schritt und Tritt komplizierte, zum Teil noch nicht bewältigte mathematische Probleme an. Diese werden wir hier mit Still-schweigen übergehen und nicht erörtern.

2

Als nächstes wollen wir die gegenseitige Abhängigkeit von Quantenfeldern betrachten.

Von zwei Funktionen  $g(x)$  und  $f(x)$  heißt die erstere ab-

hängig von der zweiten, wenn es eine Beziehung  $g(x) = F[f(x)]$  mit geeignetem  $F(y)$  gibt. Ein analoger Begriff für Quantenfelder kann mit Hilfe der Haagschen Algebren gewonnen werden. Dabei nutzt man folgende Tatsache aus: Für zwei beschränkte Operatoren  $a$  und  $b$  ist  $b$  genau dann von  $a$  abhängig, wenn  $b$  in der von  $a$  erzeugten von Neumannschen Algebra enthalten ist. Sei  $\Delta$  eine (offene) Menge von Raum-Zeit-Punkten und  $A_k(x)$  seien Quantenfelder. Mit  $F(\Delta)$  bezeichnen wir die Gesamtheit aller beschränkten Operatoren, die von den Operatoren  $A_k(x)$  mit  $x$  aus  $\Delta$  abhängig sind.  $F(\Delta)$  ist eine von Neumann-Algebra und die Zuordnung

$$\Delta \rightarrow F(\Delta) \quad (1)$$

heißt „das Haag-Feld der  $A_k(x)$ “.

Ist nun  $B_n(x)$  eine zweite Menge von Quantenfeldern und  $\Delta \rightarrow G(\Delta)$  das Haag-Feld der  $B$ , so nennen wir gerade dann  $B$  von  $A$  abhängig, wenn immer  $G(\Delta) \subseteq F(\Delta)$  gilt.

3

Nach dem im ersten Abschnitt Erörterten wäre es wünschenswert, aus der Irreduzibilität zweier Sätze von Quantenfeldern  $A$  und  $B$  auch deren gegenseitige Abhängigkeit folgern zu können. Mit anderen Worten, unter welchen Bedingungen folgt aus  $F(M) = G(M)$ , wobei  $M$  der ganze Minkowski-Raum ist, die Gleichheit der Haagschen Felder von  $A$  und  $B$ ?

Die Frage wird mit Hilfe des Haagschen Dualitätsaxioms behandelt.

Zunächst definieren wir eine von Neumann-Algebra  $F(\Delta)'$  durch die Angabe von Operatoren, die sie erzeugen. Sprechen wir kurz von Bose- (Fermi-) Operatoren, wenn Vertauschbarkeit (schiefe Vertauschbarkeit) mit dem Statistikoperator vorliegt. Der Statistikoperator hat den Eigenwert 1 für Zustände mit Bose-Statistik und  $-1$  für Fermi-Statistik. Ein Bose-Operator sei nun in  $F(\Delta)'$  genau dann, wenn er mit allen Operatoren aus  $F(\Delta)$  vertauscht. Ein Fermi-Operator sei in  $F(\Delta)'$  genau dann, wenn er mit den Bose-Operatoren aus  $F(\Delta)$  vertauscht und mit den Fermi-Operatoren aus  $F(\Delta)$  schief vertauscht.

Die kleinste von Neumann-Algebra dieser Eigenschaft nennen wir  $F(\Delta)'$ .

Nun definieren wir die Menge der Raum-Zeit-Punkt  $\Delta'$ .

Ein Weltpunkt  $y$  liege genau dann in  $\Delta'$ , wenn er zu

allen  $x$  aus  $\Delta$  raumartig liegt. Anders gesagt,  $\Delta'$  besteht aus den von  $\Delta$  kausal unabhängigen Weltpunkten. Eine konvexe Punktmenge, für die  $\Delta = (\Delta)'$  gilt, nennt man einen „Diamanten“ wegen ihrer Ähnlichkeit mit der Elementarzelle des Diamantkristalls.

Nach einem grundlegenden Axiom für Quantenfelder, der sogenannten „Lokalität“ oder „Einstein-Kausalität“, gilt

$$[A_n(x), A_m(y)]_{\pm} = 0 \quad (2)$$

für kausal unabhängige Weltpunkte  $x$  und  $y$ . Dabei tritt der Antikommutator gerade dann auf, wenn zwei Fermi-Operatoren vorliegen. Wir folgern aus (2) die Gültigkeit von

$$F(\Delta') \leq F(\Delta) \quad (3)$$

für das Haag-Feld von  $A$  und sagen,  $A$  bzw.  $F$  seien „lokal“.

Die Einstein-Kausalität sollte aber auch für beliebige Quantenfelder, die die tatsächlichen Verhältnisse der Natur widerspiegeln, gelten. Das heißt aber

$$[A_n(x), B_m(y)]_{\pm} = 0 \quad (4)$$

für kausal unabhängige Weltpunkte sowie

$$G(\Delta') \leq F(\Delta) \quad \text{und} \quad F(\Delta') \leq G(\Delta), \quad (5)$$

falls  $G$  das Haag-Feld von  $B$  bezeichnet. Die Formeln (4) bzw. (5) beschreiben wir durch die Redeweise  $A$  und  $B$ , bzw.  $F$  und  $G$  seien relativ lokal.

Das Dualitätsaxiom formulieren wir jetzt wie folgt: Ist das Raum-Zeit-Gebiet ein Diamant und ist das Haag-Feld (bzw. das erzeugende Quantenfeld  $A$ ) irreduzibel, so sei

$$F(\Delta') = F(\Delta), \quad (6)$$

Ist daher  $F$  lokal und irreduzibel,  $G$  und  $F$  relativ lokal, so folgt aus (5) und (6) nach einigen Schlüssen

$$G(\Delta) \leq F(\Delta) \quad (7)$$

für alle  $\Delta$ . Damit ist eine Antwort auf die eingangs gestellte Frage gegeben: Unter den genannten Bedingungen ist  $B$  von  $A$  bzw.  $G$  von  $F$  abhängig.

Ist auch  $B$  noch irreduzibel, so sind die Haag-Felder von  $A$  und  $B$  gleich. Das Haag-Feld erscheint somit als eine Invariante für die Beschreibung der Elementarteilchenprozesse. Wir können von irgendeiner Menge von Quantenfeldern ausgehen, die „alle“ Teilchen zu beschreiben vermögen. Eine solche Auswahl kann in gewissen Grenzen ziemlich willkürlich erfolgen. Immer jedoch ist das zugehörige Haag-Feld das gleiche.

#### 4

Zu den bedeutendsten Leistungen auf dem Gebiet der axiomatischen Quantenfeldtheorie gehört der konstruktive Existenzbeweis für die Streumatrix  $S$  von Haag und Ruelle. Jeder Operator, der sich in der Gestalt einer endlichen Summe der Form

$$q = \Sigma \int A_n(x_1) A_m(x_2) \cdots f(x_1, x_2, \dots) dx_1 dx_2 \dots \quad (8)$$

mit „zahmen“ Testfunktionen  $f$  darstellen läßt, wird quasilokal genannt.

Sei  $|1\rangle$  ein Eigenzustand des Operators der Ruhemasse

mit Eigenwert  $m > 0$ , also ein „Einteilchenzustand“. Es kommt dann darauf an, den quasilokalen Operator  $q$  so zu bestimmen, daß er  $|1\rangle$  aus dem Vakuumzustand  $|0\rangle$  erzeugt:

$$q|0\rangle = |1\rangle, \quad q^*|0\rangle = 0. \quad (9)$$

Wir benützen nun für das Weitere die unitäre Darstellung  $U(a)$  der raumzeitlichen Translationen

$$x \rightarrow x + a$$

sowie genügend reguläre, nur positive Frequenzen enthaltende Lösungen  $k(x)$  der Klein-Gordon-Gleichung zur Masse  $m$ . Zunächst bilden wir das „quasilokale Feld“

$$q(y) = U(y) q U(-y) \quad (10)$$

und dann die Operatoren

$$a_n(t) = \int_{t=\text{const.}} \left( q(x) \frac{\partial}{\partial t} k_n(x) - k_n(x) \frac{\partial}{\partial t} q(x) \right) d^3x. \quad (11)$$

Mit den Operatoren  $a_n(t)$  und  $a_n^*(t)$  bilden wir nun Polynome. Sei  $Q(t)$  ein solches Polynom. Dann existiert der starke Limes

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} Q(t) |0\rangle = |>\pm \quad (12)$$

und es ist  $|>^+$  der out-Zustand zum in-Zustand  $|>^-$ . Durch

$$S |>^- = |>^+ \quad (13)$$

ist daher eine Verknüpfung gegeben, von der man die Eindeutigkeit der Zuordnung und ihre Isometrie zeigen kann.

Durch die natürliche Forderung, daß die in-Zustände den gleichen Raum wie die out-Zustände aufspannen, wird die Unitarität des so definierten Streuoperators garantiert. Der Zusammenhang mit dem LSZ-Formalismus wurde von Hepp untersucht. Man hat Grund zu der Annahme, daß die Streutheorie von Haag-Ruelle von größerer Allgemeinheit ist.

#### 5

Wieder entsteht das Problem der Eindeutigkeit, diesmal für die  $S$ -Matrix. Seien  $A_A(x)$  und  $B_B(x)$  zwei irreduzible Sätze Quantenfelder, welche Streumatrizen  $S_A$  und  $S_B$  nach Haag-Ruelle bestimmen. Wann sind beide gleich? Hier können wir auf die nach ihrem Entdecker genannten Borchers-Klassen verweisen: Ist  $A_n(x)$  eine irreduzible Menge Quantenfelder und ist  $A$  lokal, so sind irgend zwei Quantenfelder, die zu  $A$  relativ lokal sind, sowohl selbst lokal als auch untereinander relativ lokal. Dazu ist allerdings noch notwendig, daß sich alle beteiligten Felder gemäß derselben unitären Darstellung der Lorentz-Gruppe transformieren. Diese offenbar sehr natürliche Forderung wird kaum als wesentliche Einschränkung empfunden werden, wie übrigens auch die stets vorausgesetzte Nichtnegativität des Energie- und Massenspektrums.

Zu jeder Borchers-Klasse gehört nun genau ein TCP-Operator, und hierauf gründet sich der Eindeutigkeitsatz für die Streumatrix  $S$ . Die Felder einer Borchers-Klasse geben nämlich genau dann zur gleichen  $S$ -Matrix Anlaß, wenn die gleichen in-Felder vorliegen.

Das Ergebnis  $S_A = S_B$  erhalten wir freilich für irre-

duzible, lokale und relativ lokale  $A$  und  $B$  auch schon durch die Beobachtung, daß wir zur Konstruktion der quasilokalen Operatoren (8) von vornherein sowohl die  $A_n(x)$  als auch die  $B_m(x)$  verwenden können.

6

Auf der anderen Seite folgt aus den Überlegungen des Abschnittes drei, daß alle Felder einer *Borchers*-Klasse von jedem in ihr enthaltenen irreduziblen Satz abhängig sind.

Die *Borchers*-Klasse bestimmt somit nicht nur eine  $S$ -Matrix, sondern auch ein einziges *Haag*-Feld.

Deshalb ist es nicht unbegründet, Quantenfelder nicht als einzelne, fundamentale Größen zu betrachten, sondern die Gesamtheit der zu einem *Haag*-Feld gehörenden Felder und quasilokale Operatoren als ein natürliches Untersuchungsobjekt anzusehen. Schließlich wird man die Vermutung hegen, daß das *Haag*-Feld das eigentliche fundamentale Objekt ist und die Quantenfelder diesem zugeordnete, gleichsam sekundäre Größen bilden.

Daher ist es wichtig zu wissen, wie die  $S$ -Matrix direkt aus dem *Haag*-Feld heraus zu erhalten ist. Schritte in dieser Richtung wurden von *Araki* unternommen, dem man auch die Aufklärung über die (alles andere als triviale) Natur derjenigen *Haag*-Felder verdankt, die zu freien *Bose*-Teilchen nichtverschwindender Masse gehören.

Zum Abschluß sei noch auf die Querverbindung zur Theorie der Observablen hingewiesen: Ist  $a$  ein Operator, der zu einer physikalisch beobachtbaren Größe gehört, und liegt der Operator  $a$  in der *Haagschen* Algebra  $F(\Delta)$ , so nehmen wir an, daß sich die „Beobachtung der Größe  $a$ “ im Raum-Zeit-Gebiet  $\Delta$  realisieren läßt. Dies unterstreicht die Bedeutung der *Haag*-Felder.

(Literatur ist vom Verfasser anzufordern)

Anschrift des Verfassers:  
Prof. Dr. A. Uhlmann  
Theoretisch-Physikalisches Institut