

Als Manuskript gedruckt

## Bemerkungen zu einem Satz von Reeh und Schlieder

Von

ARMIN UHLMANN, Leipzig

Herrn Prof. Dr. K. Schuster, Jena, zum 60. Geburtstag gewidmet

Es wird eine elementare Ableitung eines Satzes von *Reeh* und *Schlieder* gegeben und einige aus dem Satz folgende Konsequenzen werden erörtert.

1. Wir beschränken uns hier auf die Diskussion skalarer hermitescher Quantenfelder, da die Verallgemeinerungen auf kompliziertere Fälle auf der Hand liegen. Das Quantenfeld  $\varphi(x)$  wird als operatorwertige Distribution im Sinne von *Wightman* (*Phys. Rev.* 101 (1956) 860; *Les Problèmes Mathématique de la Théorie Quantique des Champs*, Lille 1957, p. 1—38) behandelt. Jeder beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion  $f$  auf dem Minkowski-Raum mit kompaktem Träger wird hierbei ein Operator  $\varphi(f)$  zugeordnet, der symbolisch

$$\varphi(f) = \int \varphi(x) f(x) d^4x$$

geschrieben wird. Der Definitionsbereich aller dieser Operatoren enthält einen auf eins normierten translationsinvarianten Vektor  $\Omega_0$  („den“ Vakuumzustand) und mit  $\Omega$  auch die Vektoren  $\varphi(f)\Omega$ . Wir bezeichnen mit  $D_0$  die kleinste lineare Mannigfaltigkeit von Vektoren, für die

$$\Omega_0 \in D_0$$

und

$$\varphi(f) D_0 \subseteq D_0$$

für alle Testfunktionen  $f$  gilt.  $D_0$  liegt dicht im Hilbert-Raum. Die Hermitizität des Feldes wird durch die Beziehungen

$$\varphi(f^*) \subseteq \varphi(f)^*$$

ausgedrückt.

2. Der Satz von *Reeh* und *Schlieder* (*Nuovo Cim.* 22 (1961) 1051), den wir im Auge haben, lautet so: Sei  $G$  eine nicht leere offene Menge des Minkowski-Raumes. Die Menge der Vektoren, die durch Anwendung von Polynomen aus den Feldoperatoren  $\varphi(f)$  auf  $\Omega_0$  gewonnen werden können, liegt im Hilbert-Raum bereits dann dicht, wenn als Testfunktionen nur solche mit Träger in  $G$  zugelassen werden.

Zum Beweis benötigt man die Translationsinvarianz und die Spektralitätsforderungen (nicht-negatives Energiespektrum).

Sei  $H_1$  der von den obengenannten Vektoren erzeugte abgeschlossene Teilraum. Wir bemerken zunächst, daß  $H_1$  der ganze Hilbert-Raum ist, wenn er translationsinvariant ist. Er enthält dann nämlich alle Vektoren, die aus  $\Omega_0$  durch Anwendung eines Polynoms von Feldoperatoren  $\varphi(f)$  hervorgehen, deren Träger in beliebigen aus  $G$  durch Translation hervor-

gegangenen Gebieten liegen. Ist aber  $g$  eine beliebige Testfunktion, so kann ihr Träger durch endlich viele geeignet translatierte Gebiete  $G$  überdeckt werden. Es läßt sich dann  $g$  durch eine endliche Summe von Testfunktionen darstellen, deren Träger in aus durch Translation hervorgegangenen Gebieten liegen.  $H_1$  enthält daher ganz  $D_0$  und somit ist  $H_1$  der ganze Hilbert-Raum. Wir beweisen nun die Translationsinvarianz von  $H_1$ . Sei  $\Omega'$  ein beliebiger zu  $H_1$  orthogonaler Vektor und  $\Omega$  durch Anwendung eines Feldoperator-Polynoms mit Trägern in  $G$  auf den Vakuumzustand hervorgegangen. Ist  $u_{(\lambda)}$  eine einparametrische Gruppe von zeitartigen Translationen, so ist  $\Omega'$  auch zu  $u_{(\lambda)}\Omega$  orthogonal, wenn  $\lambda$  genügend nahe bei Null liegt, da eine genügend kleine Translation endlich viele kompakte Mengen nicht aus einer offenen hinausführt.

Die Funktion

$$(\Omega', u_{(\lambda)}\Omega) = a(\lambda)$$

verschwindet daher für eine reelle Umgebung der Null. Andererseits ist sie wegen der Spektralitätsbedingung stetiger Randwert einer in der oberen Halbebene analytischen Funktion. Sie verschwindet daher identisch. Das orthogonale Komplement von  $H_1$  ist daher invariant gegenüber beliebigen zeitartigen Translationen. Diese erzeugen aber die gesamte Translationsgruppe des Minkowski-Raumes. Damit ist die Beweisskizze beendet.

3. Eine einfache Folge des eben bewiesenen Satzes ist das Lemma: Bildet der auf  $D_0$  definierte abschließbare Operator  $B$   $D_0$  in sich ab und ist  $B$  mit allen  $\varphi(f)$  vertauschbar, bei denen die Träger von  $f$  in einer festen offenen Teilmenge  $G$  des Minkowski-Raumes liegen, so folgt aus  $B\Omega_0 = 0$  das identische Verschwinden von  $B$ . (Das Lemma gilt übrigens bereits, wenn das Bild von  $D_0$  im Definitionsbereich aller  $\varphi(g)^*$  liegt.) Denn wegen der Kommutativität und wegen  $B\Omega_0 = 0$  verschwindet  $B$  auf der im Hilbert-Raum dicht liegenden Vektormenge, die durch Anwendung von Polynomen aus den Feldoperatoren mit Trägern in  $G$  entsteht. Verschwindet aber ein abschließbarer Operator auf einer dichten Vektormenge, so ist er identisch Null.

4. Ist  $A$  ein Polynom in den Feldoperatoren eines lokalen Feldes mit kompakten Trägern und ist  $A\Omega_0 = 0$ , so verschwindet  $A$  identisch. Denn einmal ist  $A$  abschließbar und führt  $D_0$  in sich über. Zum

anderen liegen aber die Träger der  $\varphi_{(f)}$ , die in das Polynom  $A$  eingehen, in einer kompakten Menge des Minkowski-Raumes. Es gibt dann eine offene Menge von Weltpunkten, die nicht leer ist und raumartig zu dieser kompakten Menge gelegen ist. Wegen der Lokalität sind die  $\varphi_{(g)}$  mit Trägern in dieser offenen Menge mit  $A$  vertauschbar. Folglich kann das Lemma von Abschnitt 3 angewendet werden, so daß sich die Behauptung ergibt.

5. Sei  $\Omega$  ein beliebiges Element aus  $D_0$ . Es gibt dann genau einen Operator  $B$ , der  $D_0$  in sich abbildet, mit allen  $\varphi_{(f)}$  vertauschbar ist und für den  $B\Omega_0 = \Omega$  gilt. Zum Beweis definieren wir den Operator  $B$ . Ist  $\Omega_1 \in D_0$ , so gibt es nach Abschnitt 4 genau einen Operator  $A$ , der  $\Omega_0$  in  $\Omega_1$  überführt und der ein Polynom in den Feldoperatoren ist. Wir setzen dann  $B\Omega_1 = A\Omega$ . Dadurch wird ein linearer Operator  $B$  definiert, der die gewünschten Eigenschaften besitzt. Seine Eindeutigkeit folgt aus der Bemerkung, daß die Polynome in den Feldoperatoren bezüglich  $D_0$  strikt zyklisch mit dem zyklischen Vektor  $\Omega_0$  sind. Diese Polynome besitzen daher höchstens einen mit ihnen kommutierenden Operator, der  $\Omega_0$  in ein gegebenes Element  $\Omega$  abbildet.

6. Das (kommutative!) Zentrum der Algebra der Polynome in den Feldoperatoren wird durch folgende Operatoren  $B$  gebildet:  $B$  ist ein mit allen  $\varphi_{(f)}$  vertauschbarer Operator, der  $D_0$  in  $D_0$  abbildet.  $B$  ist weiterhin abschließbar und  $D_0$  liegt im Definitionsbereich von  $B^*$ . (Es langt, daß  $B^*$  auf  $\Omega_0$  definiert ist.) Zum Beweis haben wir einen Operator  $A$  anzugeben, der ein Polynom in den Feldoperatoren ist und mit  $B$  übereinstimmt. Ist  $B\Omega_0 = \Omega$ , so wählen wir  $A$  so, daß ebenfalls  $A\Omega_0 = \Omega$  gilt. Die Differenz dieser beiden Operatoren bildet  $\Omega_0$  auf die Null ab und ist abschließbar. Nun kann  $A$  aus Operatoren  $\varphi_{(f)}$  durch Polynombildung gewonnen werden und dabei liegen die Träger der beteiligten Testfunktionen (da es endlich viele sind) in einer kompakten Punktmenge. Liegt die nicht leere offene Menge  $G$  des Minkowski-Raumes raumartig zu dieser kompakten Menge, so kommutiert schließlich obige Differenz mit allen  $\varphi_{(g)}$  mit Trägern in  $G$ . Dann tritt aber das

in 3 genannte Lemma in Kraft und die Differenz verschwindet identisch, d. h.  $A = B$ .

Dieses Ergebnis ist ein Analogon zu einem Resultat von Reeh und Schlieder (preprint, München 1962) und von Borchers (Nuovo Cim. 24 (1962) 214), nach dem die mit allen Feldoperatoren vertauschbaren beschränkten Operatoren eine kommutative Algebra bilden.

7. (R. Jost, Lectures on Field Theory-Naples 1959). Sei

$$a(f, g) = \langle [\varphi_{(f)}, \varphi_{(g)}] \rangle_0$$

gesetzt. Ist

$$[\varphi_{(f)}, \varphi_{(g)}] \Omega_0 = a(f, g) \Omega_0,$$

so ist  $\varphi_{(x)}$  ein generalisiertes freies Feld (Greenberg, Ann. Phys. 16 (1961) 158). Denn für Testfunktion mit kompakten Trägern ist  $[\varphi_{(f)}, \varphi_{(g)}] - a(f, g) \cdot 1$  ein Polynom in den Feldoperatoren, das den Vakuumzustand annulliert. Nach Abschnitt 4 ist dieses Polynom aber identisch Null und somit  $[\varphi_{(f)}, \varphi_{(g)}]$  ein Vielfaches des Einsoperators.

8. Die folgende Bemerkung geht auf Lopuszanski (Wroclaw, private Mitteilung) zurück. Sei  $(\square - m^2)\varphi_{(x)} = j_{(x)}$ . Ist dann  $j_{(x)} \Omega_0 = 0$  so ist  $\varphi_{(x)}$  ein freies Feld zur Ruhemasse  $m$ .

Schreiben wir nämlich

$$j_{(f)} = \int j_{(x)} f_{(x)} d^4x$$

für Testfunktionen mit kompakten Trägern, so ist  $j_{(f)} \Omega_0 = 0$  und das Feld  $j_{(x)}$  relativ lokal zum Feld  $\varphi_{(x)}$ . Bezeichnet  $G$  eine zum Träger von  $f$  raumartig gelegene offene Menge, so trifft auf  $j_{(f)}$  die Voraussetzung des Lemmas aus Abschnitt 3 zu. Daher verschwindet  $j_{(f)}$  für alle  $f$  identisch und  $j_{(x)} \equiv 0$ .

9. Geht man zu den Testfunktionen der gemäßigten Distributionen über, so gilt die Feststellung von Abschnitt 4 offenbar auch dann, wenn es auch nur einen Weltpunkt gibt, der zum Träger der Testfunktion raumartig liegt.

(Eingegangen :4. September 1963)

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Armin Uhlmann, Theoretisch-Physikalisches Institut der Karl-Marx-Universität Leipzig.