# Über die Algebra der Feldoperatoren (Teil 1)

von

Armin Uhlmann

Theoretisch-Physikalisches Institut

der

Karl-Marx-Universität Leipzig

T U L 3

9/63

Abstract: A theorem of Reeh and Schlieder is used to examine some features of the structure of the algebra of field operators.

## 1. Einführung, Definitionen

Wir betrachten hier ein zyklisches, skalares und hermitisches Quantenfeld $\varphi(x)$, das wir hier als operatorwertige Distribution über den beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen des Minkowski-Raumes mit kompakten Trägern auffassen [1]. Die sich aus einer Erweiterbarkeit auf den Bereich der Testfunktionen für die temperierten Distributionen ergebenden zusätzlichen Eigenschaften können später berücksichtigt werden. [2]

Mit R bezeichnen wir die symmetrische Algebra der formalen endlichen Summen

$$f = f_0 + f_1(x_1) + f_2(x_1, x_2) + \cdots + f_m(x_1, \dots, x_m), \quad (1)$$

wobei $f_0$ eine Konstante und $f_j(x_1 \dots x_j)$ für $j \neq 0$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion von j Punkten des Minkowski-Raumes mit kompaktem Träger ist. Die $f_0$, $f_1$, $f_2$ ... heißen Komponenten von f und zwar die o-te, 1-te, 2-te ... Komponente. Das durch $f_0 = 1$, $f_j = 0$ für $j \neq 0$ gegebene Element von R bezeichnen wir auch mit e und nennen es "die Eins von R". Die Addition und Multiplikation mit einer komplexen Zahl ist in R komponentenweise erklärt, indem jeweils die o-ten, 1-ten usw. Komponenten addiert bzw. mit der gegebenen komplexen Zahl multipliziert werden. Zur Definition einer assoziativen und distributiven Multiplikation $\otimes$ langt es ebenfalls, diese für die Komponenten zu erklären: Die Multiplikation mit der o-ten Komponente entspricht der Multiplikation mit der durch die o-te Komponente gegebenen komplexen Zahl, während für $n \neq 0$, $m \neq 0$

$$f_n(x_1, \dots, x_n) \otimes f_m(x_1, \dots, x_m) = f_n(x_1, \dots, x_n) \cdot f_m(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$$

gesetzt wird.

Weiter ist

$$f^* = f_0^* + f_1^* + f_2^* + \cdots$$

durch

$$f_0^* = \bar{f}_0 \;, \quad f_n^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{f}_n(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$$

definiert, falls f wie in (1) gegeben ist. ($\bar{f}_n$ ist die zu $f_n$ konjugiert komplexe Größe). Hierdurch ist in R eine Involution erklärt:

$$(f+g)^* = f^* + g^* \;, \quad (\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^* \;, \qquad (f \otimes g)^* = g^* \otimes f^* \;. \tag{2}$$

Eine Folge ~~von~~ $f^{(j)}$, $j = 1,2,\ldots$ von Elementen aus R heißt genau dann konvergent mit Limes f, wenn a) komponentenweise Konvergenz der Testfunktionen $f_n^{(j)}$, $j = 1,2,\ldots$, im Sinne von L. Schwartz gegen die Komponente $f_n$ von f für alle n vorliegt und wenn b) $f_m^{(j)} = f_m = 0$ für $m > n_0$ für ein gewisses $n_0$ ist.

$\varphi(x)$ ist eine Darstellung von R in einem Hilbert-Raum H durch unbeschränkte Operatoren $\varphi(f)$, für die wir symbolisch

$$\varphi(f) = f_0 \cdot \mathbf{1} + \int f_1(x_1)\, \varphi(x_1)\, d^4x_1 + \int f_2(x_1,x_2)\, \varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)\, d^4x_1\, d^4x_2 + \cdots \tag{3}$$

schreiben, falls f das Element (1) von R ist. $\underline{1}$ bezeichnet den 1-Operator des Hilbert-Raumes H.

Zur Beschreibung der Darstellung gehört zunächst die Angabe der Definitionsbereiche der Operatoren $\varphi(f)$ sowie, da es sich um ein zyklisches Feld handeln soll, eines bezüglich der Darstellung zyklischen Vektors: Zur Darstellung gehört eine in H dichte Mannigfaltigkeit $D_0$ und ein in $D_0$ enthaltener Vakuumzustand $\Omega_0$ (= ein lorentzinvarianter Vektor, den wir als normiert annehmen), mit nachfolgenden Eigenschaften:

$$\varphi(f)\, D_0 \subseteq D_0 \qquad \text{für alle} \quad f \in R. \tag{4a}$$

Zu jedem $\Omega \in D_0$ gibt es ein $f \in R$ mit $\varphi(f)\,\Omega_0 = \Omega$. (4b)

Um ihn von den anderen möglicherweise vorhandenen lorentzinvarianten Vektoren zu unterscheiden, nennen wir $\Omega_0$ auch den zu $\varphi(x)$ gehörenden Vakuumzustand.

Da es in der Regel möglich ist, alle Operatoren $\varphi(f)$ so zu erweitern, daß der gemeinsame Definitionsbereich der erweiterten Operatoren $D_0$ echt umfaßt, nennen wir $D_0$ den "primitiven Definitionsbereich" des Feldes $\varphi(x)$.

Die Redeweise, $\varphi(x)$ ist eine Darstellung der symmetrischen Algebra R soll ausdrücken, daß auf dem primitiven Definitionsbereich folgende Relationen gelten:

$$\varphi(e)\,\Omega = \Omega\,, \tag{5a}$$

$$\varphi(\lambda f + \lambda' f') = \lambda\,\varphi(f) + \lambda'\,\varphi(f'), \tag{5b}$$

$$\varphi(f \otimes f') = \varphi(f)\cdot\varphi(f')\,, \tag{5c}$$

$$(\Omega_1, \varphi(f)\Omega_2) = (\varphi(f^*)\Omega_1, \Omega_2) \quad \text{für alle } \Omega_1, \Omega_2 \in D_0. \tag{5d}$$

Setzt man

$$(\Omega_0, \varphi(f)\Omega_0) = \ell(f),$$

so ist $\ell(f)$ eine positive, stetige Linearform über R, die symbolisch

$$\ell(f) = f_0 + \int f_1(x_1) \langle \varphi(x_1)\rangle_0\, d^4x_1 + \int f_2(x_1,x_2) \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\rangle_0\, d^4x_1\, d^4x_2 + \cdots$$

geschrieben werde. Wir können die Vektoren aus $D_0$ mit den Restklassen nach dem Linksideal J aller f betrachten, für die $\varphi(f)\Omega_0 = 0$ ist:

$$\Omega \equiv g + J \qquad \text{falls} \quad \Omega = \varphi(g)\,\Omega_0\,.$$

Es ist $f \in J$ genau dann, wenn $\ell(g \otimes f) = 0$ für alle $g \in R$ ist. Nach der allgemeinen Darstellungstheorie ist daher $\varphi(x)$ die durch die Linearform $\ell(f)$ bestimmte Darstellung von R. (Satz von Wightman 1956).

<u>Der maximale Definitionsbereich von $\varphi(x)$.</u>

Bezeichnet $\varphi(f)^*$ den zu $\varphi(f)$ adjungierten Operator - man beachte, daß $D_0$ als Definitionsbereich von $\varphi(f)$ gilt -, so ist (5d) mit

$$\varphi(f^*) \subseteq \varphi(f)^* \tag{6}$$

identisch. Daher ist $\varphi(f)^*$ eine Fortsetzung von $\varphi(f^*)$ und somit ist $\varphi(f^*)^*$ eine Fortsetzung von $\varphi(f)$. Wir bezeichnen den Definitionsbereich von $\varphi(f^*)^*$ mit D(f) und setzen zur Abkürzung

$$\hat{\varphi}(f)\Omega = \varphi(f^*)^*\Omega \qquad \text{für} \quad \Omega \in \mathcal{D}(f) \,. \tag{7}$$

Als den maximalen Definitionsbereich D von $\varphi(x)$ bezeichnen wir den Durchschnitt aller Mengen D(f) mit f $\in$ R. Offenbar ist D als Durchschnitt linearer Mannigfaltigkeiten D(f) linear und alle Elemente des primitiven Definitionsbereiches liegen auch in D.

Wir präzisieren jetzt die Definition von $\hat{\varphi}(f)$, indem wir festsetzen, daß $\hat{\varphi}(f)$ die Beschränkung von $\varphi(f^*)^*$ auf D ist. D ist also der Definitionsbereich der Operatoren $\hat{\varphi}(f)$. Aus den bisherigen Annahmen folgt <u>nicht</u>, daß auf D ein Analogon zur Formel (5d) richtig ist. Es ist eine offene und höchst wichtige Frage, unter welchen Voraussetzungen dies der Fall ist. Immerhin haben wir aber die anderen Beziehungen zur Verfügung, die (4a), (5a,b,c) verallgemeinern und die nun hergeleitet werden.

Zunächst ist $\hat{\varphi}(e)$ der Einsoperator. Dann gilt offenbar für alle $\Omega$ aus dem Durchschnitt von D(f) und D(f')

$$\varphi^*((\lambda f + \lambda' f')^*) = \lambda\, \varphi^*(f^*) + \lambda'\, \varphi^*(f'^*)$$

und daher auch auf der kleineren Menge D. Diese Relation entspricht der Gleichung (5b). Sei nun $\Omega \in$ D es ist $\hat{\varphi}(f)\Omega \in$ D. Wir zeigen hierzu, daß es zu jedem $g \in R$ ein $\Omega'$ mit

$$(\varphi^*(f^*)\Omega, \varphi(g)\Omega_1) = (\Omega', \Omega_1) \quad \text{für alle} \quad \Omega_1 \in \mathcal{D}_0 \tag{+}$$

gibt. Dann ist nämlich $\varphi^*(f^*)\Omega \in \mathcal{D}(g)$ und $\Omega' = \varphi^*(g)\,\varphi^*(f^*)\Omega$.

Nun ist aber die linke Seite von (+) gleich $(\Omega, \varphi(f^*)\varphi(g)\Omega_1)$ und daher gleich $(\Omega, \varphi(f^* \otimes g)\Omega_1)$. Da $\Omega \in \mathcal{D}$ ergibt eine leichte Umformung $(\varphi^*(f^* \bullet g)\Omega, \Omega_1)$. Dies ist gerade die in (+) verlangte Form.

Gleichzeitig ist gezeigt, daß $\varphi^*(g)\varphi^*(f^*) = \varphi^*(f^* \otimes g)$ auf D ist. Nach der Substitution $g \to g^*$ ergibt sich die (5c) entsprechende Formel. Insgesamt gilt demnach:

$$\hat{\varphi}(e) = 1 \tag{8a}$$

$$\hat{\varphi}(\lambda f + \lambda' f') = \lambda \hat{\varphi}(f) + \lambda' \hat{\varphi}(f') \tag{8b}$$

$$\hat{\varphi}(f) D \subseteq D \tag{8c}$$

$$\hat{\varphi}(f \otimes g) = \hat{\varphi}(f) \cdot \hat{\varphi}(g) \quad . \tag{8d}$$

Da die $\hat{\varphi}(f)$ adjungierte Operatoren mit in H dichtem Definitionsbereich besitzen, folgt aus dem Verschwinden von $\hat{\varphi}(f)$ auf einer dichten Teilmenge von D, daß $\hat{\varphi}(f)$ der Nulloperator ist. Man schließt hieraus insbesondere, daß $\hat{\varphi}(f_1)$ und $\hat{\varphi}(f_2)$ auf D kommutieren, wenn $\varphi(f_1)$ und $\varphi(f_2)$ vertauschbar sind.

## 3. Ein Satz von Reeh und Schlieder.

Wir formulieren nun einen von Reeh und Schlieder [3] gefundenen Satz, für dessen Beweis wir auf die angegebene Literatur verweisen. Hierzu müssen wir, was wir von nun an stets tun wollen, voraussetzen, daß $\varphi(x)$ ein lorentzinvariantes, lokales Quantenfeld ist, das das Spektralitätsaxiom erfüllt. Unter dem Träger (carrier, support) c(f) des Elementes f von R mit der Darstellung (1) verstehen wir die kleinste abgeschlossene Punktmenge des Minkowski-Raumes, für die gilt: Ist für ein j (j = 1,2,...) und für die j Weltpunkte $x_1,\dots x_j$ die Funktion $f_j(x_1,\dots,x_j)$ ungleich Null, so gehören $x_1,\dots x_j$ zu dieser Punktmenge.
Nach unseren Voraussetzungen über R ist der Träger c(f) jedes Elementes f von R eine kompakte Punktmenge des Minkowski-Raumes.
Sei nun G eine offene Punktmenge des Minkowski-Raumes. Die Menge aller f aus R, deren Träger in G liegt, ist eine symmetrische Unter-

algebra von R, die wir mit R(G) bezeichnen. (In dieser Terminologie ist insbesondere R = R(M), falls M den ganzen Minkowski-Raum bezeichnet.)

Unter den genannten Voraussetzungen über $\varphi(x)$ gilt dann:

<u>Satz 1:</u> (Reeh und Schlieder)

Ist G eine offene Menge des Minkowski-Raumes, so liegt die Gesamtheit der Vektoren

$$\varphi(f)\Omega_0 \qquad \text{mit} \qquad f \in R(G)$$

dicht in H.

Eine erste Folgerung aus Satz 1 ist:

<u>Lemma 1:</u>

Gilt für ein f aus R

$$\varphi(f)\Omega_0 = 0,$$

so ist $\varphi(f)$ und mithin auch $\hat{\varphi}(f)$ identisch Null.

Der Träger o(f) von f ist nämlich eine kompakte Punktmenge. Daher gibt es eine offene Menge G des Minkowski-Raumes, die raumartig zu o(f) liegt. Dann aber gilt wegen der Lokalität und der Voraussetzung des Lemmas

$$0 = \varphi(f')\varphi(f)\Omega_0 = \varphi(f)\varphi(f')\Omega_0 \quad \text{für} \quad f' \in R(G).$$

Die Menge der Vektoren $\varphi(f')\Omega_0$ mit $f' \in R(G)$ ist aber nach Satz 1 dicht in H. $\varphi(f)$ verschwindet daher auf einer in $D_0$ gelegenen dichten Teilmenge und daher zusammen mit $\hat{\varphi}(f)$ identisch.

Sei $\Omega \in D_0$ und $\Omega = \varphi(f)\Omega_0$. Wir setzen dann $\Omega^* = \varphi(f^*)\Omega_0$.

Die Zuordnung

$$\Omega \rightarrow \Omega^* \quad , \quad \Omega \in D_0 \tag{9}$$

ist eine eindeutige antilineare Abbildung von $D_0$ auf sich. Diese Behauptung ist trivial, wenn die Eindeutigkeit gezeigt ist: Ist auch $\varphi(g)\Omega_0 = \Omega$, so $\varphi(f-g)\Omega_0 = 0$ und daher nach Lemma 1

$\varphi(f) = \varphi(g)$ und $\varphi(f)^* = \varphi(g)^*$. Daher ist $\hat{\varphi}(f^*) = \hat{\varphi}(g^*)$ und schließlich $\varphi(f^*)\Omega_0 = \varphi(g^*)\Omega_0$ w.z.b.w.

Sei $[\varphi(f), \varphi(g)] = 0$, dann ist

$$(\varphi(f^*)\Omega_0, \varphi(g)\Omega_0) = (\Omega_0, \varphi(f)\varphi(g)\Omega_0) = (\Omega_0, \varphi(g)\varphi(f)\Omega_0) = (\varphi(g^*)\Omega_0, \varphi(f)\Omega_0).$$

Weiter, ist $\sigma$ eine eigentliche Lorentztransformation, so folgt aus der Invarianz des Vakuums und der Unitarität von $\mathcal{U}(\sigma)$

$$\mathcal{U}(\sigma)\Omega = \mathcal{U}(\sigma)\varphi(f)\mathcal{U}(\sigma^{-1})\Omega_0 = \varphi(f^\sigma)\Omega_0,$$

$$(\mathcal{U}(\sigma)\Omega)^* = \varphi(f^{\sigma *})\Omega_0 = \varphi(f^{*\sigma})\Omega_0 = \mathcal{U}(\sigma)\varphi(f^*)\mathcal{U}(\sigma^{-1})\Omega_0$$

Zusammengefaßt:

$$(\lambda_1\Omega_1 + \lambda_2\Omega_2)^* = \bar{\lambda}_1\Omega_1^* + \bar{\lambda}_2\Omega_2^*, \tag{10a}$$

$$(\Omega_1^*, \Omega_2) = (\Omega_2^*, \Omega_1) \text{ falls } \Omega_K = \varphi(f_K)\Omega_0 \text{ und } [\varphi(f_1), \varphi(f_2)] = 0, \tag{10b}$$

$$(\mathcal{U}(\sigma)\Omega)^* = \mathcal{U}(\sigma)\Omega^*, \tag{10c}$$

$$(\Omega^*)^* = \Omega. \tag{10d}$$

Wir werden die Operation (9) zur Klassifikation der mit den Feldoperatoren vertauschbaren Operatoren benutzen.

## 4. Die Algebren $\mathfrak{r}(G)$ und $\hat{\mathfrak{r}}(G)$.

Der Satz von Reeh und Schlieder gestattet die Verallgemeinerung der Betrachtungen von Nr. 1 und 2 auf gewisse Teilalgebren der Algebra der Feldoperatoren.

Sei $G$ eine offene Menge des Minkowski-Raumes. Wir bezeichnen die nach Satz 1 in $H$ dichte lineare Mannigfaltigkeit der Vektoren $\Omega$, die eine Darstellung $\Omega = \varphi(f)\Omega_0$ mit $f \in R(G)$ gestatten mit $\mathcal{D}_0(G)$.

Aus $\Omega \in \mathcal{D}_0(G)$ folgt $\Omega^* \in \mathcal{D}_0(G)$, da mit $f$ auch $f^*$ in $G$ liegt.

Ist $f \in \mathcal{R}(G)$, so verstehen wir unter $\varphi_G(f)$ die Beschränkung des Operators $\varphi(f)$ auf die Menge $\mathcal{D}_0(G)$. Die Formeln (4) und (5) bleiben richtig, wenn man überall $\mathcal{D}_0$ durch $\mathcal{D}_0(G)$, R durch $\mathcal{R}(G)$ und $\varphi(f)$ durch $\varphi_G(f)$ mit $f \in \mathcal{R}(G)$ ersetzt. Insbesondere bildet die Gesamtheit der Operatoren $\varphi_G(f)$ mit $C(f) \subset G$ eine Algebra, die $\mathfrak{A}(G)$ genannt wird.

Nun sei $\mathcal{D}(f,G)$ der Definitionsbereich von $\varphi_G(f)^*$. Wir setzen

$$\mathcal{D}(G) = \bigcap \mathcal{D}(f,G) \quad \text{mit} \quad f \in \mathcal{R}(G). \tag{11}$$

Offenbar gilt

$$\mathcal{D}_0(G_1) \subseteq \mathcal{D}_0(G_2) \subseteq \mathcal{D}(G_2) \subseteq \mathcal{D}(G_1) \qquad \text{falls } G_1 \subseteq G_2 \tag{12}$$

ist.

Denn es ist $\mathcal{D}(f,G_1) \supseteq \mathcal{D}(f,G_2)$ falls $G_1$ in $G_2$ enthalten ist.

Nach dem Vorbild von Nr. 2 definieren wir

$$\hat{\varphi}_G(f) = \varphi_G(f^*)^* \qquad \text{für } f \in \mathcal{R}(G),\ \Omega \in \mathcal{D}(G), \tag{13}$$

so daß

$$(\varphi_G(f^*)\Omega_1, \Omega_2) = (\Omega_1, \hat{\varphi}_G(f)\Omega_2) \quad \text{für } \Omega_1 \in \mathcal{D}_0(G),\ \Omega_2 \in \mathcal{D}(G) \tag{14}$$

gilt. Hieraus schließt man unmittelbar

$$\hat{\varphi}_{G_2}(f) \subseteq \hat{\varphi}_{G_1}(f) \qquad \text{für } C(f) \subseteq G_1 \subseteq G_2. \tag{15}$$

Wörtliche Übertragung der Schlüsse von Nr. 2 ergibt, daß für $f, g \in \mathcal{R}(G)$ auf $\mathcal{D}(G)$ folgende Beziehungen gelten:

$$\hat{\varphi}_G(e) = 1 \tag{16a}$$

$$\hat{\varphi}_G(\lambda f + \mu g) = \lambda \hat{\varphi}_G(f) + \mu \hat{\varphi}_G(g) \tag{16b}$$

$$\hat{\varphi}_G(f)\,\mathcal{D}(G) \subseteq \mathcal{D}(G) \tag{16c}$$

$$\hat{\varphi}_G(f \otimes g) = \hat{\varphi}_G(f) \cdot \hat{\varphi}_G(g). \tag{16d}$$

Wir bezeichnen die Algebra aller $\hat{\varphi}_G(f)$ mit $\hat{\mathfrak{A}}(G)$.

Ist $G_1 \subseteq G_2$, so haben wir für ein $f \in \mathcal{R}(G_1)$ folgende Zuordnungen erklärt:

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r] & \varphi_{G_1}(f) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \hat{\varphi}_{G_1}(f) \arrow[d, leftrightarrow] \\ & \varphi_{G_2}(f) \arrow[r, leftrightarrow] & \hat{\varphi}_{G_2}(f) \end{tikzcd} \qquad \text{falls } f \in R(G_1) \qquad (17)$$

Sie induzieren zwischen den eben erklärten Algebren folgendes "kommutative" System von (homomorphen bzw. isomorphen) Abbildungen:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{A}(G_1) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\mathfrak{A}}(G_1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{A}(G_2) \arrow[r] & \hat{\mathfrak{A}}(G_2) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (18)$$

Wir werden auch folgende Ausdrucksweise benutzen:

Ist $A \in \mathfrak{A}(G)$, so bezeichnen wir mit $\hat{A}$ die in $\hat{\mathfrak{A}}(G)$ liegende Fortsetzung von $A$, d.h. $A \leq \hat{A}$. Der Übergang $\varphi(f) \rightarrow \varphi(f^*)$ kann auch wie folgt beschrieben werden: Zu jedem Operator $A_1 \in \mathfrak{A}(G)$ gibt es genau einen zweiten $A_2 \in \mathfrak{A}(G)$ mit $A_1 \leq A_2^*$. $A_1 \leq A_2^*$ ist mit jeder der Beziehungen

$$A_2 \leq A_1^*\ , \quad \hat{A}_1 \leq A_2^*\ , \quad \hat{A}_2 \leq A_1^*$$

äquivalent.

## 5. Die mit $\mathfrak{A}(G)$ (formal) kommutierenden Operatoren.

Wir bezeichnen mit $\sigma(G)$ folgende lineare Mannigfaltigkeit von Operatoren: Ein Operator $B$ gehöre genau dann zu $o(G)$, wenn

a) der Definitionsbereich von $B$ gleich $\mathfrak{D}_0(G)$ ist,

b) das Bild von $\mathfrak{D}_0(G)$ unter $B$ in $\mathfrak{D}(G)$ liegt und

c) $BA\Omega = \hat{A}B\Omega$ für alle $A \in \mathfrak{A}(G)$ und $\Omega \in \mathfrak{D}_0(G)$ ist.

Dabei ist $A \leq \hat{A} \in \hat{\mathfrak{A}}(G)$ vorausgesetzt.

Die Operatoren aus $o(G)$ nennen wir "die mit $\mathfrak{A}(G)$ formal kommutierenden Operatoren". Da in der Definition die Forderung nach Abschließbarkeit nicht aufgenommen wurde, sind die Operatoren aus $o(G)$ in der Regel stark singulär. Da die Gesamtheit der Operatoren $o(G)$ jedoch leicht zu konstruieren ist, wird das Aufsuchen der physikalisch wichtigen Operatoren auf eine Klassifikation der Elemente von $o(G)$ nach verschiedenen Regularitätsanforderungen zurückgeführt. $o(G)$ ist eine lineare Mannigfaltigkeit von Operatoren. Ist $\mathcal{B} \in o(G)$ , so ist wegen $\Omega_0 \in \mathcal{D}_0(G)$ der Vektor $\mathcal{B}\Omega_0$ definiert und in $\mathcal{D}(G)$ gelegen. Die Abbildung

$$\sigma(G) \ni \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}\Omega_0 \in \mathcal{D}(G) \tag{19}$$

ist eine lineare Abbildung. Der folgende Satz zeigt, daß es sich um eine eineindeutige Abbildung von $o(G)$ auf $\mathcal{D}(G)$ handelt.

<u>Satz 2:</u> Zu jedem $\Omega \in \mathcal{D}(G)$ gibt es genau einen Operator

$$\mathcal{B} \in \sigma(G) \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{B}\Omega_0 = \Omega \ .$$

Wir führen den Beweis in drei Schritten.

**Eindeutigkeit:** Seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ zwei mit $\mathcal{N}(G)$ kommutierende Operatoren. Ist $\mathcal{B}_1\Omega_0 = \mathcal{B}_2\Omega_0$ , so annulliert $\mathcal{B} = \mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_1$ das Vakuum. Sei $\Omega_1 \in \mathcal{D}_0(G)$ beliebig. Es gibt ein $A \in \mathcal{N}(G)$ mit $A\Omega_0 = \Omega_1$ . Dann ist $\mathcal{B}\Omega_1 = \mathcal{B}A\Omega_0 = \hat{A}\mathcal{B}\Omega_0 = 0$. Also $\mathcal{B} = 0$.

**Konstruktion:** Sei $\Omega \in \mathcal{D}(G)$ ein vorgegebener Vektor. Ist $\Omega_1 \in \mathcal{D}_0(G)$ beliebig, so gibt es nach Lemma 1 <u>genau</u> ein $A \in \mathcal{N}(G)$ mit $A\Omega_0 = \Omega_1$. Wir setzen dann $\mathcal{B}\Omega_1 = \hat{A}\Omega$ . Dadurch ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{D}_0(G)$ in $\mathcal{D}(G)$ definiert. Wir zeigen nun die

**Kommutativität:** Dazu bemerken wir, daß nach obigem und Lemma 1 der Operator eindeutig gegeben ist durch die Relation

$$\mathcal{B}A\Omega_0 = \hat{A}\Omega \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{N}(G).$$

Es folgt $\mathcal{B} A_1 A_2 \Omega_0 = \hat{A}_1 \hat{A}_2 \Omega$ sowie $\mathcal{B} A_2 \Omega_0 = \hat{A}_2 \Omega$ bzw. $\hat{A}_1 \mathcal{B} A_2 \Omega_0 = \hat{A}_1 \hat{A}_2 \Omega_0$.

Also

$$\mathcal{B} A_1 A_2 \Omega_0 = \hat{A}_1 \mathcal{B} A_2 \Omega_0 \quad .$$

Variiert $A_2$ in $\mathfrak{r}(G)$, so durchläuft $A_2 \Omega_0$ die Menge $\mathcal{D}_0(G)$.
Also $\mathcal{B} A_1 = \hat{A}_1 \mathcal{B}$ auf $\mathcal{D}_0(G)$.
Damit ist Satz 2 bewiesen.

<u>Lemma 2:</u> $A_1$ sei ein linearer Operator, der auf $\mathcal{D}_0(G)$ definiert ist und $\mathcal{D}_0(G)$ in sich abbildet.
$A_2$ sei ein auf $\mathcal{D}(G)$ definierter Operator, der $\mathcal{D}(G)$ in sich abbildet.
Gilt dann

$$\mathcal{B} A_1 \Omega = A_2 \mathcal{B} \Omega$$

für alle $\Omega \in \mathcal{D}_0(G), \mathcal{B} \in o(G)$, so ist
$A_1 \in \mathfrak{r}(G)$, $A_2 \in \hat{\mathfrak{r}}(G)$ und $A_2 = \hat{A}_1$.

Zum Beweis wählen wir $A \in \mathfrak{r}(G)$ so, daß $A_1 \Omega_0 = A \Omega_0$. Dann gilt

$$\mathcal{B}(A_1 - A)\Omega = (A_2 - \hat{A}) \mathcal{B} \Omega . \qquad (x)$$

Setzen wir $\Omega = \Omega_0$, so entsteht $(A_2 - \hat{A})\mathcal{B}\Omega_0 = 0$. Nach Satz 2 sind alle Vektoren aus $\mathcal{D}(G)$ in der Gestalt $\mathcal{B}\Omega_0$ mit $\mathcal{B} \in o(G)$ darstellbar. Daher ist $A_2 = \hat{A}$. Es folgt aus (x) nunmehr $\mathcal{B}(A_1 - A) = \sigma$ auf $\mathcal{D}_0(G)$. Nun liegt aber der Operator $\mathcal{B}$ = Identität in $\sigma(G)$ und daher $A_1 = A$.
Ganz ähnlich zeigt man

<u>Lemma 3:</u> $A$ sei ein auf $\mathcal{D}_0(G)$ definierter Operator, der $\mathcal{D}_0(G)$ in sich abbildet. Gilt auf $\mathcal{D}_0(G)$

$$A \mathcal{B} \Omega = \mathcal{B} A \Omega$$

für alle $\mathcal{B} \in \sigma(G)$, die $\mathcal{D}_0(G)$ in sich abbilden, so ist $\hat{A}$ ein Operator aus $\mathcal{N}(G)$.

Ist $\mathcal{B} \in \sigma(G)$ und $\mathcal{B}\Omega_0 \in \mathcal{D}_0(G)$, so folgt aus $A \in \mathcal{N}(G)$ mit $A^*\Omega_0 = \mathcal{B}\Omega_0$ die Formel

$$\mathcal{B}\Omega = (A\Omega^*)^* , \quad A\Omega = (\mathcal{B}\Omega^*)^* \quad \text{für } \Omega \in \mathcal{D}_0(G) . \qquad (20)$$

Denn nach Voraussetzung ist für $\Omega = A_1\Omega_0$

$$\mathcal{B}\Omega = A_1 A^* \Omega_0 \quad \text{sowie} \quad (A\Omega^*)^* = (AA_1^*\Omega_0)^* = A_1 A^* \Omega_0 .$$

Die zweite Formel geht aus der ersten durch bloße Umformung hervor.

<u>Lemma 4:</u> Sei $G_1 \leq G_2$ . Zu jedem $\mathcal{B}_2 \in \sigma(G_2)$ gibt es genau ein $\mathcal{B}_1 \in \sigma(G_1)$ mit $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$ .

Aus $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$ folgt $\mathcal{B}_1\Omega_0 = \mathcal{B}_2\Omega_0$. Es gibt aber nach Satz 2 höchstens ein $\mathcal{B}_1$ mit vorgegebenem $\mathcal{B}_1\Omega_0$ .

Andererseits folgt aus $\mathcal{B}_2 \in \sigma(G_2)$ , daß $\mathcal{B}_2\Omega_0 \in \mathcal{D}(G_2) \leq \mathcal{D}(G_1)$. Daher gibt es ein $\mathcal{B}_1 \in \sigma(G_1)$ mit $\mathcal{B}_1\Omega_0 = \mathcal{B}_2\Omega_0$ . Für $A \in \mathcal{N}(G_1)$ folgt somit

$$\hat{A}\mathcal{B}_1\Omega_0 = \hat{A}\mathcal{B}_2\Omega_0 \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{B}_1 A\Omega_0 = \mathcal{B}_2 A\Omega_0 .$$

Jedes $\Omega \in \mathcal{D}_0(G_1)$ besitzt aber eine Darstellung $A\Omega_0$ mit $A \in \mathcal{N}(G_1)$.

## <u>6. Die mit $\mathcal{N}(G)$ regulär kommutierenden Operatoren</u>

Wir betrachten folgende lineare Teilmannigfaltigkeit $\sigma_0(G)$ von Operatoren aus $\sigma(G)$ : Ein Operator $\mathcal{B} \in \sigma(G)$ gehöre genau dann zu $\sigma_0(G)$ , wenn ein Operator $\mathcal{B}_1 \in \sigma(G)$ mit $\mathcal{B} \leq \mathcal{B}_1^*$ existiert. [4]

<u>Lemma 5:</u> Ist $\mathcal{B} \in \sigma_0(G)$, $\mathcal{B}_1 \in \sigma(G)$ und $\mathcal{B} \leq \mathcal{B}_1^*$, so ist auch $\mathcal{B}_1 \in \sigma_0(G)$.

Denn es folgt $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_1^{**} \leq \mathcal{B}^*$ .

<u>Lemma 6:</u> Sei $\mathcal{B} \in \sigma(G)$ und liege $\mathcal{D}_0(G)$ im Definitionsbereich von $\mathcal{B}^*$. Dann ist $\mathcal{B} \in \sigma_0(G)$.

Wir zeigen, daß $\mathcal{B}^*\Omega_0 \in \mathcal{D}(G)$ ist. Hierzu muß zu jedem $A \in \mathcal{N}(G)$ ein $\Omega'$ mit $(A\Omega, \mathcal{B}^*\Omega_0) = (\Omega, \Omega')$ existieren. Dies folgt aus der Umformung

$$(A\Omega, \mathcal{B}^*\Omega_0) = (\mathcal{B}A\Omega, \Omega_0) = (\hat{A}\mathcal{B}\Omega, \Omega_0) = (\mathcal{B}\Omega, A^*\Omega_0) = (\Omega, \mathcal{B}^*A^*\Omega_0),$$

da $A^*\Omega_0 \in \mathcal{D}_0(G)$. Damit ist Lemma 6 auf einen Spezialfall des folgenden zurückgeführt:

<u>Lemma 7:</u> Sei $\mathcal{B} \in \sigma(G)$. Genau dann ist $\mathcal{B} \in \sigma_0(G)$, wenn $\Omega_0$ im Definitionsbereich von $\mathcal{B}^*$ liegt und $\mathcal{B}^*\Omega_0 \in \mathcal{D}(G)$ ist.

Die Notwendigkeit folgt unmittelbar aus Lemma 5. Wir zeigen die Hinlänglichkeit. Wir wählen $\mathcal{B}_1 \in \sigma(G)$ so, daß $\mathcal{B}_1\Omega_0 = \mathcal{B}^*\Omega_0$ ist. Zu beliebigen $A \in \mathcal{N}(G)$ bestimmen wir $\hat{A}_1 \in \hat{\mathcal{N}}(G)$ durch $A_1^* \leq A$. Dann ist nach Voraussetzung

$$(\Omega_0, \mathcal{B}A_1\Omega) = (A\Omega_0, A_1\Omega) \qquad \text{für alle } \Omega \in \mathcal{D}_0(G).$$

Nun ist aber

$$(\Omega_0, \mathcal{B}A_1\Omega) = (A\Omega_0, \mathcal{B}\Omega)$$

$$(\mathcal{B}_1\Omega_0, A_1\Omega) = (\mathcal{B}_1 A\Omega_0, \Omega).$$

Jedes $\Omega' \in \mathcal{D}_0(G)$ kann durch $\Omega' = A\Omega_0$ dargestellt werden. Daher

$$(\Omega', \mathcal{B}\Omega) = (\mathcal{B}_1\Omega', \Omega) \quad \text{für} \quad \Omega', \Omega \in \mathcal{D}_0(G).$$

Also ist $\mathcal{B} \leq \mathcal{B}_1^*$ und $\mathcal{B} \in \sigma_0(G)$.

Seien nun $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ zwei Operatoren aus $\sigma(G)$. Der Beweis von Lemma 7 sagt, daß genau dann $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2^*$ ist, wenn

$$(\mathcal{B}_1\Omega, \Omega_0) = (\Omega, \mathcal{B}_2\Omega_0) \quad \text{für} \quad \Omega \in \mathcal{D}_0(G).$$

Setzen wir $\Omega = A\Omega_0$, so ist

$$(\mathcal{B}_1\Omega, \Omega_0) = (\hat{A}\mathcal{B}_1\Omega_0, \Omega_0) = (\mathcal{B}_1\Omega_0, A^*\Omega_0).$$

Nun ist jedoch $A^* \Omega_0 = \Omega^*$ und daher gilt

Lemma 8: Sei $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \sigma(G)$ und $\mathcal{B}_1 \Omega_0 = \Omega_1$ sowie $\mathcal{B}_2 \Omega_0 = \Omega_1$. Genau dann ist $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2^*$ , wenn

$$(\Omega, \Omega_1) = (\Omega_2, \Omega^*) \tag{21}$$

für alle $\Omega \in \mathcal{D}_0(G)$ gilt.

Formel (21) wird für die weitere Untersuchung von $\sigma_0(G)$ nützlich sein.

Lemma 9: Ist $G_1 \leq G_2$ und $\mathcal{B}_2 \in \sigma_0(G_2)$, so gibt es genau ein $\mathcal{B}_1 \in \sigma_0(G_1)$ mit $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$ .

Nach Lemma 4 gibt es genau ein $\mathcal{B}_1 \in \sigma(G_1)$ mit der verlangten Eigenschaft $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$ . Es folgt $\mathcal{B}_2^* \leq \mathcal{B}_1^*$ . $\mathcal{D}_0(G_2)$ gehört aber zum Definitionsbereich von $\mathcal{B}_2^*$ und somit auch zu dem von $\mathcal{B}_1^*$ . Wegen $\mathcal{D}_0(G_1) \leq \mathcal{D}_0(G_2)$ ist nach Lemma 6 der Operator $\mathcal{B}_1$ in $\sigma_0(G_1)$ .

## 7. Gebiete mit der "Eigenschaft a".

$G$ sei eine offene Menge des Minkowski-Raumes $M$ . Wir sagen $G$ besitze die Eigenschaft a, wenn es zu jeder in $G$ enthaltenen kompakten Punktmenge $N$ einen in $G$ gelegenen Weltpunkt gibt, der zu $N$ raumartig liegt.

Der ganze Raum hat die Eigenschaft a. Sei weiter $Q_0$ ein Weltpunkt. Die Menge $G_0$ aller (von $Q_0$ verschiedenen) zu $Q_0$ raumartigen Weltpunkte ist eine offene Menge mit der Eigenschaft a. Ist weiterhin $G$ eine beliebige offene Menge, die den Weltpunkt $Q_0$ enthält, so besitzt $G \wedge G_0$ die Eigenschaft a. Sei weiterhin $G$ eine offene Menge, zu der ein Weltpunkt $Q_1$ raumartig liegt. Sei $N_1$ die Gesamtheit der geraden Strecken, die $Q_1$ mit einem Punkt von $\overline{G}$ verbinden. Die Menge $G_1$ der inneren Punkte der Punktmenge $N_1$ hat die Eigenschaft a, und in und in der Umgebung des Punktes $Q_1$ gibt es solche, die zu $\bar{G}_1$ raumartig liegen. Ist $G$ beschränkt, so auch $G_1$.

<u>Lemma 10:</u> $G$ habe die Eigenschaft a. Ist $B \in \sigma(G)$ beliebig, so gibt es eine Folge von Operatoren $A_1, A_2, A_3, \cdots$ in $\mathcal{M}(G)$ so, daß

$$\lim_{K\to\infty} (\Omega, A_i \Omega') = (\Omega, B \Omega')$$

für alle $\Omega, \Omega' \in D_0(G)$ ist.

Beweis: Da $G$ offen ist, gibt es eine Folge $N_1, N_2, \cdots$ von kompakten Teilmengen von $G$ folgender Beschaffenheit:

1) $N_K \subseteq N_{K+1}$ für alle $K$.

2) Ist $N \subset G$ und $N$ kompakt, so ist $N \subseteq N_K$ für $K \geq K_0(N)$

Sei $Q_K \in G$ und raumartig zu $N_K$. Es gibt dann eine ganz in $G$ enthaltene Umgebung $\mathcal{U}_K$, die zu $N_K$ raumartig ist. Die Menge aller Vektoren $\varphi(f)\Omega_0$ mit $c(f) \subset \mathcal{U}_K$ liegt nach Satz 1 dicht in $H$. Wir wählen $f_K \in R$ mit $c(f_K) \subset \mathcal{U}_K$

und $\| \varphi(f_K)\Omega_0 - B\Omega_0 \| < \frac{1}{K}$.

Setzen wir $A_K = \varphi_G(f_K)$, so ist $\| A_K \Omega_0 - B \Omega_0 \| < \frac{1}{K}$.

Ist weiter $A \in \mathcal{M}(G)$, so gibt es ein $f \in R(G)$ mit $A = \varphi_G(f)$. Es gibt ein $K_0$ so, daß $c(f) \subset N_K$ für $K \geq K_0$ ist. Dann ist $c(f_K)$ für $K \geq K_0$ raumartig zu $c(f)$. Daher $[A, A_K] = 0$ für $K \geq K_0$.

Nun ist

$$\lim (A^*\Omega, A_K\Omega_0) = (A^*\Omega, B\Omega_0) = (\Omega, \hat{A} B \Omega_0) = (\Omega, BA\Omega_0).$$

Andererseits aber ist

$$(A^*\Omega, A_K\Omega_0) = (\Omega, A A_K \Omega_0) = (\Omega, A_K A \Omega_0) \text{ für } K \geq K_0.$$

Setzen wir $A\Omega_0 = \Omega'$, so ist die Behauptung des Lemmas offensichtlich.

<u>Satz 3:</u> $G$ habe die Eigenschaft a.

Der Operator $B \in \sigma_0(G)$ gehört genau dann zu $\mathcal{R}(G)$, wenn

$$B\Omega_0 \in D_0(G).$$

Die Operatoren $B$ dieser Eigenschaft bilden daher das Zentrum von $\mathcal{R}(G)$ und gleichzeitig eine kommutative in $\sigma_0(G)$ enthaltene symmetrische Algebra.

Daß das Zentrum von $\mathcal{R}(G)$ zu $\sigma_0(G)$ gehört, ist trivial. Sei nun $B \in \sigma_0(G)$ und $B\Omega_0 \in D_0(G)$. Es gibt ein $A \in \mathcal{R}(G)$ mit $B\Omega_0 = A\Omega_0$. Sei $\varphi_G(f) = A$, $c(f) \subset G$, dann gibt es eine in $G$ enthaltene offene Punktmenge $\mathcal{U}$, die zu $c(f)$ raumartig liegt. Die Operatoren $\varphi_G(f')$ mit Trägern in $\mathcal{U}$ kommutieren daher mit $A$ und nach Voraussetzung auch mit $B$. Also ist auch

$$(B - A)\,\varphi_G(f')\Omega_0 = 0 \qquad \text{falls} \quad c(f') \subset \mathcal{U}.$$

Nach Satz 1 verschwindet somit $B - A$ auf einer in $H$ dichten Teilmenge, die in $D_0(G)$ liegt. $B - A$ ist jedoch abgeschlossen, da $D_0(G)$ sowohl im Definitionsbereich von $A^*$ als auch von $B^*$ liegt. Daher ist $B = A$.

<u>Folgerung:</u> $G$ habe die Eigenschaft a. Der Operator $A$ gehöre entweder zu $\mathcal{R}(G)$ oder zu $\sigma(G)$. Aus Satz 3 und Formel (20) schließt man:

$A$ gehört genau dann zum Zentrum von $\mathcal{R}(G)$, wenn

$$(A\Omega)^* = A^*\Omega^* \quad \text{für alle} \quad \Omega \in D_0(G)$$

ist.

Bemerkungen:

[1] Wir setzen also voraus:

a) Die Wightman-Funktionen sind Distributionen

b) Die Wightman-Funktionen sind invariant unter der (Komponente der Identität der) inhomogenen Lorentz-Gruppe

c) Das Spektrum der Energieoperatoren ist nicht-negativ.

d) Lokale Vertauschbarkeit

e) Die Wightman-Funktionen führen auf einen Hilbert-Raum mit positiv definierter Metrik.

Für die hier gewählte Bezeichnungsweise (sowie weitere Literatur) siehe A. Uhlmann, Wiss.Z.Karl-Marx-Univ.Leipzig, 11 (1962) 213 sowie Preprint TUL 1, August 63.

[2] Zweckmäßigerweise betrachtet man hierzu das folgende allgemeinere Problem: Die weiter unten definierte Algebra R ist Unteralgebra einer symmetrischen Algebra R' wobei

a) die Topologie von R' stärker ist als die von R,

b) R bezüglich der R'-Topologie in R' dicht liegt.
Dadurch bleibt $\varphi(x)$ zyklisch,

c) die Linearform $\ell$ über R, die $\varphi(x)$ definiert, gestattet eine stetige Fortsetzung zu einer Linearform $\ell'$ über R'.

Es vergrößert sich dann der weiter unten definierte primitive Definitionsbereich von $\varphi(x)$, während sich der maximale Definitionsbereich von $\varphi(x)$ verkleinert.

[3] Reeh und Schlieder, Nuovo Cim. 22 (1961) 1051.
Borchers, Nuovo Cim. 24 (1962) 214
Uhlmann, Preprint TUL 2, 1963

[4] Würde nur gefordert, daß $\mathcal{B}$ abschließbar ist, so kann wahrscheinlich nicht gesichert werden, daß $\mathcal{D}_0(G)$ oder

auch nur $\Omega_o$ zum Definitionsbereich von $\mathcal{B}^*$ gehört.
Wir fordern ja sogar, daß das Bild von $\mathcal{D}_o(G)$ unter $\mathcal{B}^*$ in $\mathcal{D}(G)$ liegt.
Trotzdem sind die Forderungen an die Operatoren aus $\sigma_o(G)$ sehr schwach. Z.B. ist es eine offene Frage, ob mit $\mathcal{B} \in \sigma_o(G)$ auch die Beschränkung von $\mathcal{B}^*\mathcal{B}$ auf $\mathcal{D}_o(G)$ zu $\sigma_o(G)$ gehört.
Andererseits ist es zweckmäßig, die Forderungen an die mit $\varphi(x)$ kommutierenden Operatoren möglichst schwach zu halten; denn dies bedingt starke Forderungen an die mit $\sigma_o(G)$ kommutierenden Operatoren (deren Definition hier noch nicht erfolgte). Dadurch wird die Willkür eingeschränkt, die entsteht, wenn die in $\mathcal{N}(G)$ enthaltenen Operatoren nicht wesentlich selbstadjungiert sind.