

Als Manuskript gedruckt

# Über die Definition der Quantenfelder nach Wightman und Haag\*

Von ARMIN UHLMANN, Leipzig

1.

Wir definieren als erstes eine Algebra  $R$  wie folgt: Die Elemente von  $R$  seien die formalen Summen der Gestalt

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots,$$

wobei  $f_0$  eine komplexe Zahl und  $f_k = f_k(x_1, \dots, x_k)$  eine beliebig oft differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger von  $n$  Punkten  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$  des Minkowski-Raumes  $M$  ist. Mit anderen Worten, die  $f_n$  sind die Testfunktionen für die Schwartzschen Distributionen auf dem topologischen Produkt  $M^{(n)}$  von  $n$  Exemplaren des Minkowski-Raumes  $M$ . Sind  $\lambda$  und  $\lambda'$  komplexe Zahlen, so wird durch die Festlegung

$$\lambda(f_0 + f_1 + \dots) + \lambda'(f'_0 + f'_1 + \dots) = (\lambda f_0 + \lambda' f'_0) + (\lambda f_1 + \lambda' f'_1) + \dots$$

$R$  zu einem linearen Raum über den komplexen Zahlen. Weiter sei

$$(f_0 + f_1 + f_2 + \dots) \times (f'_0 + f'_1 + \dots) = \sum_n \sum_{i+k=n} f_i \times f'_k$$

mit

$$f_i(x_1, \dots, \underline{x}_i) \times f'_k(x_1, \dots, \underline{x}_k) = f_i(x_1, \dots, \underline{x}_i) \cdot f'_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+k})$$

für

$$i > 0, k > 0$$

und

$$f_0 \times f'_j = f'_j \times f_0 = f_0 \cdot f'_j.$$

Dabei steht rechts die Multiplikation von  $f'_j$  mit der komplexen Zahl  $f_0$ . Die Multiplikationsvorschrift  $x$  heißt „direktes Produkt“ oder auch „Tensorprodukt über den komplexen Zahlen“.

Damit ist die Algebra  $R$  definiert. Indem wir

$$\lim_j (f_0^{(j)} + f_1^{(j)} + \dots) = f_0 + f_1 + \dots$$

genau dann setzen, wenn a)  $f_k^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  im Sinne der Topologie der Testfunktionen für Distributionen für jedes  $k$  gegen  $f_k$  strebt und b)  $f_k^{(j)} = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ;  $f_k = 0$  für alle  $k \geq k_0$  mit einem gewissen  $k_0$  gilt, führen wir in  $R$  eine Topologie ein.  $R$  wird hierdurch zu einer topologischen Algebra.

Wir setzen nun

$$(f_0 + f_1 + \dots)^* = f_0^* + f_1^* + \dots,$$

\* Vortrag, gehalten auf dem „Seminar über aktuelle Probleme der Quantenfeldtheorie“, Leipzig, Oktober 1961.

wobei

$$f_0^* = \bar{f}_0,$$

$$f_k^*(x_1, \dots, x_k) = \bar{f}_k(x_k, x_{k-1}, \dots, x_1)$$

ist. (Der Querstrich bezeichnet den Übergang zur konjugiert komplexen Funktion.) Damit ist in  $R$  eine Involution definiert und  $R$  wird zu einer Algebra mit Involution bzw. zu einer \*-Algebra. Man rechnet nämlich leicht nach, daß

$$(\lambda f + \mu g)^* = \bar{\lambda} f^* + \bar{\mu} g^*, \\ (f \times g)^* = g^* \times f^*$$

ist.

2.

Wir erklären jetzt den Begriff des hermiteschen skalaren Quantenfeldes – symbolisch  $\varphi(\underline{x})$  geschrieben – nach Wightman. Sei  $H$  der Hilbert-Raum der Zustandsvektoren und sei jedem  $f \in R$  ein linearer Operator  $\varphi(f)$  des Hilbert-Raumes zugeordnet. Symbolisch schreiben wir

$$\varphi(f) = f_0 \cdot \underline{1} + \int_M f_1(\underline{x}) \varphi(\underline{x}) d^4 \underline{x} \\ + \int_{M^{(2)}} f_2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \varphi(\underline{x}_1) \varphi(\underline{x}_2) d^4 \underline{x}_1 d^4 \underline{x}_2 + \dots,$$

falls

$$f = f_0 + f_1(x_1) + f_2(x_1, x_2) + \dots$$

ist. ( $\underline{1}$  ist der Einsoperator.)

Nehmen wir für einen Augenblick an,  $\varphi(\underline{x})$  sei eine genügend reguläre Funktion, deren Werte beschränkte Operatoren in  $H$  sind. Dann folgte unmittelbar für beliebige  $f, g \in R$

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g), \quad (1)$$

$$\varphi(f \times g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g) \quad (2)$$

Nehmen wir nun  $\varphi(\underline{x})$  noch als hermitisch an –  $\varphi(\underline{x}) = \varphi^*(\underline{x})$  –, so hätten wir

$$\varphi^*(f) = \varphi(f^*), \quad (3)$$

und die Zuordnung  $f \rightarrow \varphi(f)$  wäre ein symmetrischer Homomorphismus. Um diese heuristischen Überlegungen exakt zu machen, haben wir als erstes eine Festlegung über den Definitionsbereich der Operatoren  $\varphi(f)$  zu treffen. Hierzu erinnern wir uns, daß in  $H$  aus physikalischen Gründen ein Vektor  $\omega_0$  (bis auf eine multiplikative Konstante) ausgezeichnet ist, der den Vakuumzustand beschreibt. Wir können  $(\omega_0, \omega_0) = 1$  voraussetzen. Wir fordern nun

- a) Für alle  $f \in R$  liegt  $\omega_0$  im Definitionsbereich von  $\varphi(f)$ .
- b) Für alle  $f, g \in R$  liegt  $\varphi(g) \omega_0$  im Definitionsbereich von  $\varphi(f)$ .

Wir wollen weiter annehmen, daß das in Rede stehende physikalische System durch ein skalares hermitesches Quantenfeld beschrieben werden kann und nur aus „Teilchen der Sorte  $\varphi$ “ besteht. Dann muß unter den Zustandsvektoren  $\varphi(f) \omega_0$  ein vollständiges System von Zustandsvektoren vorhanden sein. Mit anderen Worten, es soll gelten:

- c) Sei  $H'$  die Menge aller Zustandsvektoren, die eine Darstellung

$$\omega = \varphi(f) \omega_0, \quad f \in R$$

gestatten.  $H'$  ist dicht in  $H$ .

Schließlich fordern wir noch

- d) Die durch

$$(\varphi(f) \omega_0, \omega_0) = l(f), \quad f \in R \tag{4}$$

über  $R$  definierte Linearform ist stetig (im Sinne der in Nr.1 definierten Topologie).

Definition: Unter einem zyklischen, hermiteschen, skalaren Quantenfeld (symbolisch  $\varphi(x)$  geschrieben) verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Element  $f \in R$  einen linearen Operator  $\varphi(f)$  von  $H$  zuordnet, wobei die Eigenschaften a) bis d) bestehen und auf  $H'$  die Formeln (1), (2) und (3) gelten. Formel (3) ist im Sinne von

$$(\varphi(f) \omega_1, \omega_2) = (\omega_1, \varphi(f^*) \omega_2) \quad \text{für alle } \omega_1, \omega_2 \in H'$$

zu verstehen.

Das Wort „zyklisch“ soll die Eigenschaft c) ausdrücken. Im folgenden werden wir ein „zyklisches, hermitesches, skalares Quantenfeld“ einfach „skalares Quantenfeld“ nennen.

3.

Wightman hat gezeigt, daß ein Quantenfeld bereits vollständig durch die Vorgabe der Vakuum Erwartungswerte der Produkte der Feldoperatoren bestimmt ist. Dem Beweis liegt ein Verfahren zugrunde, das bei der Konstruktion der Darstellungen einer Algebra benutzt wird (siehe z.B. Neumark), und das wir jetzt kurz beschreiben wollen. Vorher sei bemerkt, daß die folgenden Ausführungen wortwörtlich auf allgemeinere Fälle als den des skalaren Quantenfeldes übertragbar sind.

Wir erinnern uns, daß durch das Quantenfeld  $\varphi(x)$  nach (4) eine stetige Linearform  $l(f)$ , über  $R$  bestimmt wird. Wir bemerken, daß aus

$$l(f) = (\varphi(f) \omega_0, \omega_0) = \overline{(\omega_0, \varphi(f) \omega_0)} = \overline{(\varphi(f^*) \omega_0, \omega_0)}$$

die Beziehung

$$\overline{l(f)} = l(f^*) \tag{5}$$

folgt. Eine Linearform dieser Eigenschaft heißt reell.

Sei nun  $l(f)$  eine beliebige stetige und reelle Linearform über  $R$ . Wir bezeichnen mit  $J$  die Menge aller  $f \in R$ , für die  $l(g \times f) = 0$  für alle  $g \in R$  gilt:

$$f \in J \iff l(g \times f) = 0 \quad \text{für alle } g \in R. \tag{6}$$

$J$  ist ein Linksideal in  $R$ ; denn mit  $f, f' \in R$  ist auch  $\lambda f + \lambda' f' \in J$  und mit  $f \in J, g \in R$  ist auch  $g \times f \in J$ . Nun zerlegen wir die Gesamtheit aller Elemente von  $R$  in Klassen  $\omega, \omega', \dots$ . Zwei Elemente  $f$  und  $f'$  aus  $R$  gehören genau dann zur gleichen Klasse, wenn die Differenz  $f - f'$  in  $J$  liegt. Jede Klasse  $\omega$  hat also die Gestalt

$$\omega = f + J$$

und

$$\omega = f + J = f' + J \iff f - f' \in J.$$

Die Gesamtheit aller Klassen bildet eine lineare Mannigfaltigkeit  $H'$ . Ist nämlich  $\omega, \omega' \in H'$  und  $\omega = f + J, \omega' = f' + J$ , so ist  $\lambda \omega + \lambda' \omega'$  definiert als die Klasse  $(\lambda f + \lambda' f') + J$ . Man zeigt leicht, daß diese Definition nicht von der Wahl der „Repräsentanten“  $f$  bzw.  $f'$  der Klassen  $\omega$  und  $\omega'$  abhängt. Diese Bemerkung gilt auch für die folgenden Konstruktionen (siehe z.B. Neumark für Einzelheiten).

Sei nun  $\omega \in H'$  und  $g \in R$  beliebig. Wir definieren

$$\varphi(g) \omega = g \times f + J \quad \text{falls } \omega = f + J$$

ist. Einfaches Nachrechnen ergibt für die Operation  $\omega \rightarrow \varphi(g) \omega$  die Gültigkeit der Regeln (1) und (2).  $H'$  ist somit eine lineare Darstellungsmannigfaltigkeit von  $R$ . Nun definieren wir

$$(\omega_1, \omega_2) = l(g^* \times f) \quad \text{falls } \omega_1 = f + J, \quad \omega_2 = g + J$$

Dadurch ist in  $H'$  eine Bilinearform eingeführt:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2, \omega) &= \lambda_1 (\omega_1, \omega) + \lambda_2 (\omega_2, \omega), \\ (\omega, \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) &= \overline{\lambda_1} (\omega, \omega_1) + \overline{\lambda_2} (\omega, \omega_2). \end{aligned}$$

Die Rechnung

$$\begin{aligned} (\varphi(h) \omega_1, \omega_2) &= l(g^* \times h \times f) = l([h^* \times g]^* \times f) \\ &= (\omega_1, \varphi(h^*) \omega_2) \end{aligned}$$

zeigt, daß auch die Regel (3) erfüllt ist. Weiter gilt

$$\overline{(\omega_1, \omega_2)} = \overline{l(g^* \times f)} = l(f^* \times g) = (\omega_2, \omega_1).$$

Schließlich ist, da  $l(f)$  stetig ist, auch

$$(\varphi(f) \omega_0, \omega_0) = l(f) \quad \text{mit } \omega_0 = \underline{1} + J$$

stetig.

Daher bestimmt jede reelle stetige Linearform über  $R$  eine symmetrische Darstellung in einem linearen Raum mit im allgemeinen „indefiniten Metrik“; d.h. ein skalares Quantenfeld mit i. allg. indefinitem Skalarprodukt. Damit nun die in Nr.2 gegebene Definition für ein skalares Quantenfeld voll zutrifft, muß  $H'$  positiv definite Metrik tragen und somit auch  $H'$  zu einem vollständigem Hilbert-Raum  $H$  zu ergänzen sein. Diese Forderung schreibt sich

$$0 \leq (\omega, \omega) = l(f^* \times f) \quad \text{für } \omega = f + J.$$

Ist nun umgekehrt  $l(f^* \times f) \geq 0$  für alle  $f \in R$  und  $l(f^* \times f) = 0$ , so kann man schließen (Neumark), daß  $f \in J$  ist und somit  $f + J$  das Nullelement von  $H'$  ist. Also folgt in diesem Falle auch

$$(\omega, \omega) = 0 \iff \omega = 0.$$

Eine Linearform, für die stets  $l(f^* \times f) \geq 0$  gilt, heißt *positiv*. Jede positive Linearform ist reell.

Wir bemerken nur noch, daß  $(\omega_0, \omega_0) = l(\underline{1})$  ist und daß der Vakuumzustand  $\omega_0$  gerade dann normiert ist, wenn  $l(\underline{1}) = 1$  ist. Dies kann man stets erreichen; denn aus  $l(\underline{1}) = 0$  folgt für eine positive Linearform ihr identisches Verschwinden.

**Satz:** Zu jeder positiven und stetigen Linearform über  $R$  kann man einen Hilbert-Raum  $H$  und ein skalares Quantenfeld  $\varphi(x)$  konstruieren. Durch diese Konstruktion werden alle durch die Definition von Nr. 2 erfaßten Quantenfelder gegeben. Zwei skalare Quantenfelder, die zur gleichen positiven Linearform über  $R$  gehören, sind strukturgleich und umgekehrt.

Man kann diesen Satz als eine andere Formulierung der *Wightmanschen* Ergebnisse auffassen, da sich die Linearform  $l$  in einfacher Weise aus den Vakuumserwartungswerten aufbaut. Symbolisch haben wir nämlich

$$l(f) = f_0 + \int_M f_1(\underline{x}) (\varphi(\underline{x}) \omega_0, \omega_0) d^4 \underline{x} \\ + \int_{M^{(2)}} f_2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) (\varphi(\underline{x}_1) \varphi(\underline{x}_2) \omega_0, \omega_0) d^4 \underline{x}_1 d^4 \underline{x}_2 + \dots$$

falls

$$f = f_0 + f_1(\underline{x}_1) + f_2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) + \dots$$

ist.

**Bemerkung 1:**

Sei  $\varphi_1(\underline{x})$  ein Quantenfeld zum Hilbert-Raum  $H_1$  und gehöre analog  $\varphi_2(\underline{x})$  zu  $H_2$ . Wir können dann einen Hilbert-Raum  $H$  und ein Quantenfeld  $\varphi(\underline{x})$  angeben, für das wir symbolisch  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  schreiben können: Gehören nämlich die positiven Linearformen  $l_1, l_2$  zu  $\varphi_1, \varphi_2$ , so werde  $\varphi$  durch die ebenfalls positive Linearform  $l_1 + l_2$  bestimmt. ( $l_1(\underline{1}) = l_2(\underline{1}) = 1$ .) Ist allgemeiner  $\varphi_\alpha(\underline{x})$  ein skalares Quantenfeld zum Hilbert-Raum  $H_\alpha$ , wobei  $\alpha$  eine gewisse Indexmenge durchlaufe und ist weiterhin  $d\mu(\alpha)$  ein Maß auf dieser Indexmenge, so können wir vorbehaltlich gewisser Konvergenzuntersuchungen

$$\varphi(x) = \int_\alpha \varphi_\alpha(x) d\mu(\alpha)$$

definieren. Dieses skalare Quantenfeld kann nämlich durch

$$l(f) = \int_\alpha l_\alpha(f) d\mu(\alpha)$$

definiert werden, falls  $l_\alpha$  die zu  $\varphi_\alpha$  gehörende positive Linearform über  $R$  ist.

**Bemerkung 2:**

Zu zwei skalaren Quantenfeldern  $\varphi_1, \varphi_2$  mögen die Linearformen  $l_1, l_2$  gehören, wobei wir  $l_1(\underline{1}) = l_2(\underline{1}) = 1$  voraussetzen. Ist dann stets

$$l_1(f^* \times f) \leq l_2(f^* \times f),$$

so besitzt das durch  $l_2$  bestimmte quantale System mehr Freiheitsgrade als das durch  $l_1$  beschriebene; es ist „zusammengesetzter“. Insbesondere hat man hiermit ein Kriterium für „elementare Systeme“. Diese sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre Linearform im Sinne der obigen Größenbeziehung minimal ist.

**Bemerkung 3:**

Die zu den freien Feldern gehörenden Linearformen wurden von *Schmidt* und *Baumann* bestimmt. Sie sind im Sinne der Bemerkung 2 minimal.

Wir haben bisher die skalaren Quantenfelder in großer Allgemeinheit definiert. Jedoch gibt es eine Reihe physikalischer Prinzipien, die aus dieser Mannigfaltigkeit eine engere Klasse auswählen. Selbstverständlich definiert nicht jede positive, stetige Linearform über  $R$  ein lorentzinvariantes Quantenfeld usw. Wir wollen diese Forderungen, die „Axiome der relativistischen Quantentheorie“, am Beispiel der skalaren Quantenfelder angeben und am Schluß herausstellen, welche Eigenschaften der Algebra zu ihrer Formulierung notwendig sind.

4.

Lorentzinvarianz. Sei  $\sigma$  eine Lorentztransformation. Wir definieren für  $f \in R$

$$f^\sigma = f_0^\sigma + f_1^\sigma + \dots$$

mit

$$f_0^\sigma = f_0, \quad f_k^\sigma(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k) = f_k(\sigma^{-1}\underline{x}_1, \dots, \sigma^{-1}\underline{x}_k).$$

Es gilt:

$$E 1: (\lambda f + \mu g)^\sigma = \lambda f^\sigma + \mu g^\sigma$$

$$E 2: (f \times g)^\sigma = f^\sigma \times g^\sigma$$

$$E 3: (f^*)^\sigma = (f^\sigma)^*$$

$$E 4: \text{Die Abbildung } (\sigma, f) \rightarrow f^\sigma \text{ ist stetig.}$$

$$E 5: (f^\sigma)^\tau = f^{\sigma\tau}$$

**Satz:** (*Wightman, Schmidt und Baumann*)

Sei  $l$  die zum skalaren Quantenfeld  $\varphi(x)$  gehörende positive Linearform über  $R$ . Genau dann ist  $\varphi(x)$  relativistisch invariant, wenn

$$l(f) = l(f^\sigma), \quad f \in R \text{ bel.}$$

für alle eigentlichen inhomogenen Lorentztransformationen gilt.

Ohne auf Einzelheiten einzugehen sei bemerkt, daß definiert wird

$$u(\sigma) \omega = f^{\sigma-1} + J \quad \text{falls} \quad \omega = f + J.$$

Es gilt dann auf  $H'$   $U(\sigma) U(\tau) = U(\sigma\tau)$ ,  $U(\underline{1}) = \underline{1}$  sowie  $(U(\sigma) \omega_1, U(\sigma) \omega_2) = (\omega_1, \omega_2)$ . Daher kann  $U(\sigma)$  zu einer unitären Darstellung auf  $H$  fortgesetzt werden. Es gilt

$$U(\sigma) \varphi(g) U(\sigma^{-1}) = \varphi(g^{\sigma^{-1}}),$$

5.

Spektralität. Hierunter verstehen wir die Forderung, daß gemäß der Speziellen Relativitätstheorie sowohl Energie als auch Ruhemassenspektrum nicht-negativ sein müssen.

Wir geben als erstes das *Kriterium von Wightman*:

Die Distributionen

$$f_n(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) \rightarrow l(f_n)$$

sind Randwerte von Funktionen der (komplexen) Relativkoordinaten  $\xi_j = x_{j+1} - x_j + iy_j$ , die auf dem  $(n-1)$ -fachen komplexen Vorwärtskegel analytisch sind.

Es sei hier noch ein anderes Kriterium gegeben, das den Vorteil hat, von der speziellen Struktur der Algebra  $R$  sehr wenig zu verwenden.

Ist  $\sigma x_i = x_i + a_i$  eine Translation, so schreiben wir für die in Nr. 4 definierte unitäre Darstellung  $u(\sigma) = u(a)$ . Sind dann  $P_j, j = 0, 1, 2, 3$  die Operatoren des Energie-Impuls-Vierervektors, so gilt

$$a \cdot P = \frac{1}{i} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{u(\lambda a) - 1}{\lambda}.$$

Die Forderung nach Spektralität bedeutet, daß  $a \cdot P$  ein positiv-halbdefiniter Operator immer dann ist, wenn der Vektor  $a$  im Vorwärtskegel liegt. Genau dann existiert eine Darstellung

$$u(a) = \int_{T_+} e^{i a \cdot k} dE(k),$$

wobei  $T_+$  den Vorwärtskegel bezeichnet und  $dE(k)$  ein Spektralmaß mit

$$\int_{T_+} dE(k) = \mathbb{1}$$

ist. Für einen beliebigen Zustandsvektor  $\omega$  heißt dies aber

$$(U(a)\omega, \omega) = \int_{T_+} e^{i a \cdot k} d\mu(k); \quad d\mu(k) = (dE(k)\omega, \omega)$$

wobei  $d\mu(k)$  ein Maß auf dem Vorwärtskegel ist. Sei nun  $\omega = f + J$ . Dann ist  $\omega = \varphi(f)\omega_0$  und

$$(U(a)\omega, \omega) = (U(a)\varphi(f)\omega_0, \varphi(f)\omega_0) = (\varphi(f^{\sigma-1})U(a)\omega_0, \varphi(f)\omega_0) = (\varphi(f^{\sigma-1})\omega_0, \varphi(f)\omega_0) = (\varphi(f^* \times f^{\sigma-1})\omega_0, \omega_0).$$

Also

$$l(f^* \times f^{\sigma-1}) = \int_{T_+} e^{i a \cdot k} d\mu(k).$$

Eine leichte Umformung ergibt:

**Spektralitätsforderung:**

Zu jedem  $f \in R$  gibt es ein auf dem Vorwärtskegel konzentriertes endliches Maß  $d\mu(k)$  so, daß

$$l(f^{\sigma} \times f^*) = \int_{T_+} e^{i a \cdot k} d\mu(k)$$

gilt. Dabei ist  $\sigma x^i = x^i + a^i$ .

6.

**Lokalität (1. Kausalitätsaxiom).**

Zur Vorbereitung dieses und des nächsten Axioms wollen wir kurz den Begriff des Trägers eines Elementes aus  $R$  erörtern. Sei  $f \in R$  und  $f = f_0 + f_1 + \dots$ . Wir betrachten die folgende Menge von Weltpunkten: Ein durch die Koordinatenwerte  $x'$  gegebener Weltpunkt liegt genau dann in  $\mathbf{0}$ , wenn für ein  $n \geq 0$  eine Punktfolge  $x_1, \dots, x_n$  mit  $f_n(x_1, \dots, x_n) \neq 0$  existiert und dabei für wenigstens ein  $j$  gilt  $x_j = x'$ .  $\mathbf{0}$  ist eine offene Punktmenge des Minkowski-Raumes. Ihr Abschluß heiße Träger von  $f$  und werde mit  $c(f)$  bezeichnet.

Es gilt

E 1:  $c(\mathbb{1}) = \emptyset$  ( $\emptyset =$  leere Menge)

E 2:  $c(\lambda f) = c(f)$  für  $\lambda \neq 0$

E 3:  $c(f + g) \subseteq c(f) \cup c(g)$

E 4:  $c(f \times g) \subseteq c(f) \cup c(g)$

E 5:  $c(f^{\sigma}) = \{c(f)\}^{\sigma}$

Das heißt, genau dann ist  $x' \in c(f^{\sigma})$ , wenn es ein  $x'' \in c(f)$  mit  $\sigma x'' = x'$  gibt.

E 6: Ist  $c(f) = c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_n; c_i \cap c_k = \emptyset$ , so gibt es Elemente  $f_j \in R$  mit  $c_j = c(f_j)$  und  $f = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ .

E 7: Die Menge aller  $f \in R$ , für die  $c(f)$  kompakt ist, liegt dicht in  $R$ .

E 8: Konvergiert die Folge  $f_1, f_2, \dots$  gegen  $f$  und liegen alle Träger  $c(f_i)$  in einer abgeschlossenen Punktmenge  $c'$ , so liegt auch  $c(f)$  in  $c'$ .

(Eigenschaft 7 ist für  $R$  völlig trivial, da jedes Element einen kompakten Träger besitzt.)

Seien nun  $c_1$  und  $c_2$  zwei Punktfolgen des Minkowski-Raumes. Wir schreiben  $c_1 \sim c_2$  genau dann, wenn die beiden Punktfolgen raumartig zueinander liegen. Dann lautet das in Rede stehende Axiom:

**Lokalität (1. Kausalitätsaxiom):**

Seien  $f, g \in R$  und  $c(f) \sim c(g)$ .

Dann gilt  $\varphi(f)\varphi(g) = \varphi(g)\varphi(f)$ .

Bezeichnen wir mit  $\perp$  die Menge aller  $f \in R$ , für die  $\varphi(f) = 0$  ist.  $\perp$  ist ein Ideal von  $R$  und  $f \in \perp$  genau dann, wenn  $l(g' \times f \times g'') = 0$  für alle  $g', g'' \in R$  gilt. Unter Benutzung des Ideals  $\perp$  schreibt sich die Lokalitätsforderung auch:

Ist  $f, g \in R$  und  $c(f) \sim c(g)$ , so ist  $f \times g - g \times f \in \perp$ .

7.

**Determinismus (2. Kausalitätsaxiom).**

Wir wollen hier ein von Haag stammendes Axiom beschreiben, das folgendes ausdrückt: Ist der Zustand eines physikalischen Systems während eines Zeitintervalls  $t_0 \dots t_0 + \delta$  bekannt, so ist damit der Zustand des Systems für alle Zeiten festgelegt (unter Annahme der Kenntnis aller auf das System wirkender Kräfte). Für ein klassisches Feld sowie für freie Quantenfelder ist hierfür bekanntlich das Bestehen einer hyperbolischen Differentialgleichung hinreichend. Wir diskutieren nun den allgemeinen Fall.

Bezeichne

$$\varrho(\underline{x}', \underline{x}'') = (x'_0 - x''_0)^2 - (x'_1 - x''_1)^2 - (x'_2 - x''_2)^2 - (x'_3 - x''_3)^2$$

den Weltabstand zweier Punkte der Raum-Zeit mit den Minkowski-Koordinaten  $x'$  bzw.  $x''$ .

Sei  $f \in R$  und  $c(f)$  der Träger von  $f$ . Wir bilden die folgende, mit  $\hat{c}(f)$  bezeichnete Menge von Weltpunkten: Ein Punkt mit Koordinaten  $x$  gehört genau dann zu  $\hat{c}(f)$ , wenn (mindestens) ein Punkt  $\underline{y} \in c(f)$  mit  $\varrho(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0$  existiert.  $\hat{c}(f)$  ist somit die Menge derjenigen Weltpunkte, die zu mindestens einem Punkt des Trägers von  $f$  nicht-raumartig liegen.

Natürlich ist  $c(f) \subseteq \hat{c}(f)$ .

Wir formulieren nun das fragliche Axiom für Elemente

$f \in R$ , deren Träger zusammenhängend sind. Dies ist wegen der Eigenschaft 6 von Nr. 6 keine Einschränkung der Allgemeinheit.

*Haagsches Kausalitätsaxiom:*

Sei  $f \in R$  ein Element mit zusammenhängendem Träger  $c(f)$ . Ist  $\mathbf{0}$  eine offene Punktmenge, für die  $\hat{c}(f) - \mathbf{0}$  nicht zusammenhängend ist, so gibt es ein  $g \in R$  mit  $c(g) \subset \mathbf{0}$  und  $g - f \in \perp$  (d.h.  $\varphi(g) = \varphi(f)$ ).

Unter  $\hat{c}(f) - \mathbf{0}$  verstehen wir dabei die Menge aller Punkte, die in  $\hat{c}(f)$ , aber nicht in  $\mathbf{0}$  liegen.

8.

Von einer endgültigen Fassung der Asymptotenbedingungen kann z.Z. wohl noch keine Rede sein. Es sei hier lediglich ein interessantes Axiom von Haag erwähnt, das es eine unmittelbare Verallgemeinerung für beliebig komplizierte Theorien gestattet. Seien  $c, c'$  zwei Mengen von Weltpunkten und sei  $c \sim c'$ . Wir definieren ihren minimalen Abstand durch

$$R(c, c') = \lim_{\underline{x} \in c, \underline{x}' \in c'} \rho(\underline{x}, \underline{x}')$$

*Asymptotenaxiom von Haag:*

Es gibt eine reelle Funktion  $\sigma(s)$  mit  $\sigma(s) \rightarrow 0$  für  $s \rightarrow \infty$  mit folgender Eigenschaft: Falls für die Elemente  $f, g \in R$  die Beziehungen  $l(f^* \times f) = l(g^* \times g) = 1$  und  $c(f) \sim c(g)$  gelten, so ist

$$l(g^* \times f) \leq \sigma(R) \quad \text{mit} \quad R = R(c(f), c(g)).$$

9.

Bisher haben wir unter  $R$  eine bestimmte in Nr. 1 beschriebene Algebra verstanden. Nun sei  $R$  eine beliebige topologische \*-Algebra mit Einselement. Sei weiter  $l(f)$  ein positive und stetige Linearform über  $R$ . Nach Nr. 3 gehört zu ihr ein Hilbert-Raum  $H$  und ein dichter Teilraum  $H'$  von  $H$  auf dem die Elemente von  $R$  als Operatoren wirken.

Was müssen wir noch von  $R$  verlangen, um die obigen Axiome formulieren zu können? Können wir sie sinnvoll formulieren, so kann  $H$ , falls sie erfüllt sind, vom Stand-

punkt der Axiome als Raum der Zustandsvektoren einer relativistischen Quantentheorie aufgefaßt werden. Insbesondere kann jede relativistische Quantenfeldtheorie mit beliebig vielen Feldern und nicht-entartetem Vakuum auf diese Weise gewonnen werden. Beschränken wir uns auf Bose-Systeme. (Der allgemeine Fall birgt keine besonderen Schwierigkeiten.) Dann haben wir zu fordern, daß eine stetige Zuordnung

$$\sigma \in \Gamma, f \in R \rightarrow f^\sigma \in R$$

( $\Gamma =$  eigentliche inhomogene Lorentzgruppe) erklärt ist, die die Eigenschaften E 1 bis E 5 von Nr. 4 erfüllt. Schließlich muß eine Vorschrift existieren, die jedem Element  $f \in R$  eine abgeschlossene Menge von Weltpunkten  $c(f)$  zuordnet, wobei die Zuordnung

$$f \rightarrow c(f)$$

die Eigenschaften E 1 bis E 8 von Nr. 6 aufzuweisen hat. Unter diesen Bedingungen ist es offenbar möglich, alle genannten Axiome zu formulieren und von der Klasse aller positiven und stetigen Linearformen bzw. von der Klasse aller Quantentheorien zu sprechen, die diese Axiome erfüllen. Damit sind einige wichtige Probleme der Struktur der relativistischen Quantentheorie auf ein wohldefiniertes mathematisches Problem aus der Theorie der \*-Algebren zurückgeführt.

#### Literatur

- Haag, R., 1. Nuovo Cim. Suppl. 14 (1959) 131. 2. Les Problèmes Mathématiques de la Théorie Quantique des Champs. Lille 1957, p.151-162.  
 Neumark, M.A., 1. Normierte Algebren. Berlin 1959 (bes. § 17).  
 Schmidt, W. und K. Baumann, 1. Nuovo Cim. 4 (1956) 860.  
 Uhlmann, A., 1. Ann. of Phys. 13 (1961) 453.  
 Wightman, A.S., 1. Phys. Rev. 101 (1956) 860. 2. Les Problèmes Mathématiques de la Théorie Quantique des Champs. Lille 1957, 0p.1-38. 3. Nuovo Cim. Suppl. 14 (1959) 81. 4. Nuovo Cim. Suppl. 14 (1959) 192.

(Eing. 16.11.1961)

Verfasser: Prof. Dr. Armin Uhlmann, Theoretisch-Physikalisches Institut der Karl-Marx-Universität Leipzig