

ÜBER EINE KLASSE DYNAMISCHER GRÖSSEN

Von

ARMIN UHLMANN

THEORETISCH-PHYSIKALISCHES INSTITUT DER KARL-MARX-UNIVERSITÄT, LEIPZIG, DDR

(Vorgelegt von K. F. Novobátzky. — Eingegangen: 21. XI. 1960)

Für beliebige Metrik werden allgemeine dynamische Grössen definiert und untersucht. Sie erweisen sich sämtlich als Zustandfunktionale im Sinne von DIRAC. Das Problem der Erhaltungssätze wird diskutiert. Gewisse energieartige dynamische Grössen liefern in zweiter Näherung zwanglos die Newtonsche Gravitationsenergie. Beim Vorliegen von Raum-Zeit-Symmetrien werden einige dynamische Grössen vor den anderen ausgezeichnet. Für die Minkowski-Metrik reduzieren sich diese auf die zehn allgemeinen Integrale der Mechanik. Schliesslich wird gezeigt, dass sich die Vertauschungsregeln der Quantentheorie für diese zehn Integrale in natürlicher Weise auf beliebige dynamische Grössen und beliebige Metrik erweitern lassen.

1. Vorbemerkungen

Wir bezeichnen mit M das Raum-Zeit-Kontinuum und mit Q, Q', \dots seine Punkte («Raum-Zeit-Punkte»). M trage eine Raum-Zeit-Metrik vom Typ $(+ - - -)$, die wir zunächst nicht näher spezifizieren. Wir legen nur noch zum Zwecke der Normierung fest, dass ds^2 als Verallgemeinerung von

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

die physikalische Dimension $[L^2]$ besitze. Lateinische Indizes laufen von 0 bis 3, griechische von 1 bis 3. Die kovariante Ableitung werde mit ∂_i bezeichnet. Das willkürliche Vorzeichen von R_{ik} werde durch $R_{ik} = R_{ink}^n$ festgelegt. Unter dem »Oberflächendifferential« df^k verstehen wir das Vektordifferential

$$df^k = \frac{1}{3!} g^{ki_0} \varepsilon_{i_0 i_1 i_2 i_3} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge dx^{i_3}.$$

Hierbei bezeichnet \wedge die äussere Multiplikation und $\varepsilon_{i_0 i_1 i_2 i_3}$ den Levi-Civita Tensor. dv sei das vierdimensionale Volumenelement.

Wir verwenden den allgemeinen Stokeschen Satz nur in der folgenden Form: Ist a_i ein beliebiges Vektorfeld, G ein Raum-Zeit-Gebiet und $R(G)$ sein orientierter Rand, so ist

$$\int_{R(G)} a_i df^i = \int_G \partial^i a_i \cdot dv. \quad (1)$$

Sei Ω eine raumartige Hyperfläche. Die Beschränkung der Metrik auf Ω induziert eine Metrik auf Ω , zu der das Volumenelement

$$dv(\Omega) = [-\text{Det}(g_{\nu\mu})]^{1/2} d^3x \quad (2)$$

gehört, falls $x^\circ = \text{const.}$ eine Gleichung für Ω ist. Bei richtiger Wahl der (wegen der auftretenden Wurzeln) willkürlichen Vorzeichen ist auf Ω

$$dv(\Omega) = \eta_i df^i, \quad (3)$$

falls η_i die auf 1 normierte Normale von Ω ist. Man findet, dass unter dieser Voraussetzung für ein beliebiges Vektorfeld a_i

$$\int_{\Omega} a_i df^i = \int_{\Omega} a_i \eta^i \cdot dv(\Omega) \quad (4)$$

gilt.

2. Definition einer Klasse dynamischer Grössen

Bekanntlich korrespondieren in der Speziellen Relativitätstheorie (im Folgenden mit SRT abgekürzt) die zehn linear unabhängigen allgemeinen dynamischen Integrale (Impuls, Energie, Drehimpuls, Schwerpunktsgrössen) zu einer linear unabhängigen Basis der infinitesimalen Transformationen der Lorentzgruppe. Die Lorentzgruppe ist die Gruppe der isometrischen Transformationen der Minkowski-Metrik, d. h. einer Metrik, die die Beziehung $R_{iknm} = 0$ erfüllt. Die Isometriegruppe einer genügend allgemein gewählten Metrik besteht jedoch nur aus der Identität.

Die sachgemässe Verallgemeinerung der obigen Korrespondenz für beliebige Metrik ist nach einer Idee von BERGMANN[1] der Übergang zur Gruppe aller eindeutigen Abbildungen von M auf sich. Zu den infinitesimalen Operatoren dieser nur von der Topologie von M und nicht von der Metrik von M abhängenden Gruppe sollten dann geeignete dynamische Grössen korrespondieren.

Bei einem solchen Standpunkt werden natürlich auch im Bereich der SRT ungeheuer viele neue »dynamische Grössen« eingeführt. Jedoch heben sich die zehn allgemeinen Integrale dank der besonderen Symmetrie der Metrik (der sie ihr Dasein überhaupt erst verdanken) aus dieser Menge so stark heraus, dass ihre fast ausschliessliche Verwendung in der SRT ihre natürliche Erklärung finden wird.

Eine eindeutige Abbildung σ von M auf sich ist eine Vorschrift, die jedem Weltpunkt Q einen zweiten Weltpunkt Q^σ zuordnet, wobei wir — wie immer in dieser Arbeit — stillschweigend genügende Regularität voraussetzen. Die Menge der Q^σ soll wieder ganz M sein. Ist $f = f(Q)$ irgendeine Funktion auf (einem Teilgebiet von) M , so ist σf durch

$$\sigma f(Q) = f(Q^\sigma) \quad (5)$$

erklärt. Ist λ ein reeller Parameter und jedem λ eine eindeutige Abbildung von M auf sich zugeordnet, $\lambda \rightarrow \sigma(\lambda)$, so haben wir eine einparametrische, auf einen kanonischen Parameter bezogene Gruppe gerade dann vor uns, wenn

$$\sigma(\lambda_1 + \lambda_2) = \sigma(\lambda_1) \sigma(\lambda_2) \quad (6)$$

ist.

Wir bilden nun einen kontravarianten Vektor wie folgt: Ist $\{x^i\}$ irgendein Koordinatensystem, so sind seine Komponenten ξ^i bezgl. dieses Koordinatensystems durch

$$\xi^i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sigma(\lambda) x^i - x^i}{\lambda} \quad (7)$$

gegeben. Man weiss, dass hierdurch wirklich ein Vektorfeld erklärt wird. Es heisst »die zu $\sigma(\lambda)$ gehörende infinitesimale Transformation«.

Man weiss weiter, dass es umgekehrt zu jedem kontravarianten Vektorfeld *genau eine* auf kanonische Parameter bezogene Gruppe $\sigma(\lambda)$ gibt, die dieses Vektorfeld zu infinitesimalen Transformation hat:

$$\sigma(\lambda) \longleftrightarrow \xi^i. \quad (8)$$

Wir betrachten nun den Energie-Impuls-Tensor T_{ik} , von dem wir zunächst nur die Eigenschaften

$$T_{ik} = T_{ki}, \quad \partial^i T_{ik} = 0 \quad (9)$$

fordern. Mit ihm definieren wir die *dynamischen Grössen*

$$P(\sigma(\lambda), \Omega) \equiv P(\xi^i, \Omega) = \int_{\Omega} \xi^i T_{ik} df^k. \quad (10)$$

Den Ausdruck (10) finden wir erstmalig bei TRAUTMAN [2] im Zusammenhang mit der kovarianten Formulierung der zehn allgemeinen Integrale der SRT.

Der Untersuchung der Ausdrücke (10) ist diese Arbeit gewidmet. Es ist zu beachten, dass wir genauer

$$P = P(\xi^i, \Omega, g_{rs}, T_{nm})$$

schreiben müssten. Jedoch werden nur gerade diejenigen Abhängigkeiten hervorgehoben werden, die gerade interessieren.

3. Die dynamischen Grössen in der Speziellen Relativitätstheorie

Ist g_{ik} die Minkowski-Metrik und ξ_i eine zur Lorentzgruppe gehörende infinitesimale Transformation, so ist $P(\xi^i, \Omega_1) = P(\xi^i, \Omega_2)$ für irgend zwei Hyperflächen Ω_1 und Ω_2 (siehe den nächsten Abschnitt). Wir schreiben daher einfach $P(\xi^i)$.

TRAUTMAN [2] hat bemerkt, dass die $P(\xi^i)$ gerade sämtliche Linearkombinationen der zehn erhalten bleibenden Grössen der SRT darstellen, wenn die ξ^i alle infinitesimalen Lorentztransformationen durchlaufen. Dies sieht man leicht ein, wenn man bedenkt, dass in einem Lorentzschon Koordinatensystem $\{x^i\}$ diese ξ^i durch

$$\xi^i = \alpha^i + \beta_l^i x^l, \quad \beta^{kl} + \beta^{lk} = 0 \quad (11)$$

gegeben sind. Wegen der Unabhängigkeit von Ω kann man nach (3)

$$P(\xi^j) = \int_{x^0=0} \xi^i T_{ik} df^k = \int_{x^0=0} \alpha^i T_{i0} d^3x + \int_{x^0=0} \beta_l^i x^l T_{k0} d^3x \quad (12)$$

schreiben. Die Behauptung ist unmittelbar abzulesen.

TRAUTMAN [2] bemerkte weiter, dass für den Fall $T_i^i = 0$ fünf weitere linear unabhängige und erhalten bleibende Grössen gewonnen werden können, wenn man die ξ^i die infinitesimalen Operationen der konformen Gruppe der Minkowski-Geometrie durchlaufen lässt. Es ergeben sich so gerade die fünfzehn aus der Konforminvarianz der Elektrodynamik folgenden erhalten bleibenden Grössen, wenn T_{ik} der Energie-Impuls-Tensor der Elektrodynamik ist.

Wir wollen zeigen, dass die $P(\xi^i, \Omega)$ die von beliebig bewegten Beobachtern gemessene Energie (mindestens) im Bereich der SRT auszudrücken gestatten. Sei nämlich ein Bündel zeitartiger Weltlinien gegeben, dass wir als Bündel der Weltlinien einer Schar beliebig bewegter Beobachter interpretieren wollen. Sei ξ^i das nach vorwärts gerichtete Feld ihrer auf 1 normierten Tangenten. Dann gehört zu ξ^i eine einparametrische Gruppe $\sigma(\lambda)$, deren Parameter λ die Eigenzeit der Beobachter angibt. Genauer, ist w eine Weltlinie des Bündels und Q ein Weltpunkt auf w , so ist w die »Bahnkurve« von $\sigma(\lambda)$ durch Q , d. h. die Menge aller

$$Q^{(\lambda)}, \quad \lambda \text{ beliebig.}$$

Die Ableitung eines beliebigen Koordinatensystems nach λ in Richtung von w (Gleichung (6)) ergibt deshalb einfach ξ^i und somit

$$ds = (\dot{x}^i \dot{x}^k g_{ik})^{1/2} d\lambda = (\xi^i \xi_i)^{1/2} d\lambda = d\lambda. \quad (13)$$

Die beliebig bewegte Schar von Beobachtern »passiere« nun eine raumartige Hyperfläche Ω und messe zum »Zeitpunkt Ω « die Energie E . Wir behaupten

$$E = \int_{\Omega} \xi^i T_{ik} df^k. \quad (14)$$

Zum Beweis bemerken wir, dass die Energie vom Zustand des Beobachters nur über die Geschwindigkeit abhängig ist. Haben daher zwei Beobachter zum

Zeitpunkt der Messung die Relativgeschwindigkeit Null, so messen sie den gleichen Energiebetrag bzw. die gleiche Energiedichte. Um dies auszunutzen, wählen wir einen beliebigen Weltpunkt Q_0 aus Ω aus. Es gibt dann eine zu einer zeitartigen Lorentz-translation gehörende infinitesimale Lorentztransformation $\bar{\xi}^i$, für die

$$\bar{\xi}^i(Q_0) = \xi^i(Q_0) \tag{15}$$

gilt, und wir können die Bahnkurven dieser Translation als Weltlinien einer Schar von Beobachtern interpretieren, die sich in einem Inertialsystem befinden. Aus (14) und (4) folgt

$$E = \int_{\Omega} \xi^i T_{ik} \eta^k dv(\Omega), \quad P(\xi^j) = \int_{\Omega} \xi^{-i} T_{ik} \eta^k dv(\Omega). \tag{16}$$

Wegen (15) zeigt der Vergleich der beiden Formeln (16), dass im Weltpunkt Q_0 die in den Integralen auftretenden Dichten gleich sind. Nach einer oben gemachten Bemerkung sind aber im Weltpunkt Q_0 auch die beiden zu den verschiedenen Scharen von Beobachtern gehörenden Energiedichten gleich. Überdies steht als Integrand von $P(\bar{\xi}^i)$ die Energiedichte, die zur Schar der in dem gewählten Inertialsystem sich befindenden Beobachter gehört. Da Q_0 beliebig war, ist

$$\xi^i T_{ik} \eta^k \tag{17}$$

die gesuchte Energiedichte und (14) liefert die Gesamtenergie.

Damit ist gezeigt, dass die Grössen (10) auch einen physikalischen Sinn haben, wenn kein Erhaltungssatz vorliegt.

4. Erhaltungssätze und ihre Klassifizierung

Sei M_0 ein von den Hyperflächen Ω_1 und Ω_2 berandetes Raum-Zeit-Gebiet. (Der orientierte Rand von M_0 sei $\Omega_2 - \Omega_1$.) Dann folgt aus (1)

$$P(\xi^j, \Omega_2) - P(\xi^j, \Omega_1) = \int_{M_0} \partial^i (\xi^k T_{ki}) dv. \tag{18}$$

Unter Berücksichtigung von (9) wird der Integrand zu $T_{ij} \partial^i \xi^j$.

Es folgt, dass $P(\xi^i, \Omega)$ genau dann eine erhalten bleibende Grösse ist (= Unabhängigkeit von Ω), wenn gilt:

$$T_{ik} \partial^i \xi^k = 0. \tag{19}$$

In der Mechanik besitzt ein System von m Freiheitsgraden $2m$ unabhängige Integrale. Jedoch nur einige (nämlich höchstens zehn) dieser Inte-

grale sind *allgemein*, d. h. von den speziellen Eigenschaften des Systems weitgehend unabhängig. Dies kann man so formulieren: Eine dynamische Grösse ist ein *allgemeines* Integral, wenn $P(\xi^i, \Omega)$ eine erhalten bleibende Grösse ist für *jede* mit (9) verträgliche Wahl des Tensors T_{ik} . Die Relation (9) ist offenbar notwendig, damit T_{ik} überhaupt als Energie-Impuls-Tensor eines Systems in Frage kommt.

Da T_{ik} symmetrisch ist, folgt dann aus (19): Damit eine dynamische Grösse $P(\xi^i, \Omega)$ ein allgemeines Integral ist, ist

$$\partial^i \xi^k + \partial^k \xi^i = 0 \quad (20)$$

notwendig und hinreichend (TRAUTMAN [2]).

Ein Vektorfeld, das (20) erfüllt, heisst Killingsch. Die Killingsfelder der SRT sind gerade die infinitesimalen Transformationen der Lorentzgruppe, so dass sich der Kreis schliesst: Obige Definition ist mit der üblichen im Falle der SRT identisch.

Man weiss, dass ein Vektorfeld ξ^i genau dann Killingsch ist, wenn es infinitesimale Transformation einer *isometrischen* einparametrischen Gruppe $\sigma(\lambda)$ ist. Daher sind die allgemeinen Integrale eineindeutig mit der Symmetriegruppe der Raum-Zeit-Metrik verknüpft.

Für eine genügend allgemeine Raum-Zeit-Metrik degeneriert jedoch die Isometriegruppe auf die identische Transformation. Wir müssen schliessen, dass allgemeine Integrale bei gekrümmter Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit eine seltene Erscheinung sind. D. h. es gibt keine »allgemeinen Erhaltungssätze«, die eine geradlinige Verallgemeinerung der aus der Newtonschen Mechanik und der SRT gewohnten allgemeinen Integrale darstellen.

Es zeigt sich, dass diese auf den ersten Blick merkwürdige Erscheinung sehr natürlich ist. In der Tat, um von (19) auf (20) zu kommen, mussten wir T_{ik} innerhalb der Bedingungen (9) geeignet »variieren« können. Genauer, es musste *genügend viele* T_{ik} mit der Eigenschaft (9) geben, die als Energie-Impuls-Tensoren in Frage kommen. Betrachten wir aber die Allgemeine Relativitätstheorie (»ART«), so gibt es zu jeder Metrik g_{ik} *genau einen* Tensor T_{ik} , der als Energie-Impuls-Tensor in Frage kommt, nämlich den durch die Einsteinschen Gleichungen gegebenen:

$$T_{ik} = \kappa^{-1} (1/2 g_{ik} R - R_{ik}). \quad (21)$$

Daher ist eine Variation der T_{ik} nur bei gleichzeitiger Veränderung der Metrik möglich und deshalb ist der Schluss von (19) auf (20) nicht durchführbar: (20) ist hinreichend aber nicht notwendig.

Für die ART scheint daher (19) die angemessenere Forderung für erhalten bleibende Grössen zu sein und die Teilung in allgemeine und spezielle Integrale

wird zumindest formal, wenn nicht sinnlos auf Grund der durch die Einsteinschen Gleichung bewirkten Relation zwischen T_{ik} und Metrik.

Die Forderung (19) ist ungleich schwächer als (20). Tatsächlich gilt, wie einfache Argumente aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zeigen, der Satz: Ist ξ^i irgendein Vektorfeld, so gibt es (mindestens) eine reelle Funktion a mit $a > 0$ so, dass $\xi^i = a\hat{\xi}^i$ die Gleichung (19) erfüllt. Erfüllt ξ^i die Gleichung (19), so auch alle Vektorfelder $\beta\xi^i$ mit

$$\xi^i T_i^k \frac{\partial}{\partial x^k} \cdot \beta = 0. \quad (x)$$

Daher ist $\beta = F(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, wobei F beliebig und β_ν drei analytisch unabhängige Lösungen von (x) sind. Es gibt also stets »genügend viele« Vektorfelder derart, dass $P(\xi^i, \Omega)$ eine erhalten bleibende Grösse ist.

Bemerken wir noch, dass nach Obigem die Struktur der erhalten bleibenden Grössen $P(\xi^i)$ von der Metrik (bzw. von T_{ik}) abhängt und somit keine »an sich« und unabhängig von jeglicher konkreten physikalischen bzw. geometrischen Struktur gegebene Dinge sind.

5. Zustandsgrössen

Sei Ω eine raumartige Hyperfläche. Ist $\{x^i\}$ ein Koordinatensystem derart, dass x^0 auf Ω konstant ist, so betrachten wir die Funktionen

$$g_{\nu\mu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x^0} g_{\nu\mu}. \quad (22)$$

Eine Grösse A heisst eine Zustandsgrösse (bzgl. der Metrik), wenn A aus den Funktionen (22) mit Hilfe von Operationen aufgebaut werden kann, deren Ausführung ohne Verlassen von Ω möglich ist. Beispiele: Integration über Ω , Differentiation nach x^ν . Besonders DIRAC[3] stellte im Hinblick auf den kanonischen Formalismus die Forderung auf, dass die Energie ein Funktional des Zustandes sein müsse.

Ehe wir diese Frage für die Grössen (10) beantworten, wollen wir (22) durch Tensoren ersetzen und somit eine Unabhängigkeit vom Koordinatensystem und eine etwas schärfere Formulierung des Begriffs der Zustandsgrösse erreichen.

Wir sagen, »ein Tensor sei modulo Ω bestimmt«, wenn wir zwei Tensoren $a_{n\dots}^m$ und $\hat{a}_{n\dots}^m$ bereits dann als gleich betrachten, wenn sie auf Ω übereinstimmen. D. h. es muss

$$a_{n\dots}^m(Q) = \hat{a}_{n\dots}^m(Q) \quad \text{für alle} \quad Q \in \Omega \quad (23)$$

sein. Zum Beispiel ist das Normalenfeld η_i von Ω nur modulo Ω bestimmt, da bei der Definition dieses Feldes die Frage uninteressant ist, wie es sich für Weltpunkte verhält, die ausserhalb Ω liegen.

Wir ersetzen nun (22) durch zwei modulo Ω bestimmte Tensoren, die nur von Ω und der Metrik abhängen. Wir nennen diese $g_{ik}(\Omega)$ und Ω_{ik} und geben die Konstruktionsvorschrift [4].

Ist η_i das Normalenfeld von Ω , so definieren wir den modulo Ω definierten Tensor $g_{ik}(\Omega)$ durch

$$g_{ik}(\Omega) = g_{mn} r_i^m r_k^n \quad (24a)$$

mit

$$r_i^k = \delta_i^k - \eta_i \eta^k. \quad (24b)$$

Etwas komplizierter ist die Angabe von Ω_{ik} . Sei a_i irgendein Vektorfeld, das auf Ω die Richtung der Normalen hat. D. h. ist η_i das Normalenfeld, so gibt es eine Funktion $a > 0$ auf Ω mit

$$a_i - a\eta_i = 0 \quad \text{für } Q \in \Omega. \quad (25a)$$

Wir setzen dann

$$\Omega_{ik} = r_i^n r_k^m (\partial_n a_m + \partial_m a_n) \cdot a^{-1}. \quad (25b)$$

Wir finden, dass, wie immer wir a_i gemäss (25a) wählen, die entstehenden Tensoren Ω_{ik} modulo Ω übereinstimmen.

Verschwindet der Tensor (25b), so ist nach NEWMAN und JANIS [5] gerade die ROSENsche Starrheitsbedingung für eine Bewegung mit Tangenten η^i erfüllt. Nach BRILL [6] heisst die Metrik »zeitsymmetrisch bezgl. Ω «, wenn (25b) verschwindet. Dieser Fall tritt insbesondere dann ein, wenn man in (25a) a Killingsch wählen kann. Dann ist Ω Niveaufläche einer Gruppe isometrischer Bewegungen, d. h. stationär.

Nach dieser Vorbereitung betrachten wir nun eine beliebige dynamische Grösse

$$P = \int_{\Omega} \xi^i T_{ik} df^k = \int_{\Omega} \xi^i T_{ik} \eta^k \cdot d\sigma(\Omega). \quad (26)$$

Offenbar ist P ein Zustandsfunktional, wenn es die Dichte

$$u = \xi^i T_{ik} \eta^k \quad (27)$$

ist. ξ^i besitzt genau eine Zerlegung

$$\xi^i = \beta\eta^i + \beta^i \quad \text{mit} \quad \beta^i \eta_i = 0. \quad (28)$$

Bei gegebenem Q ist ξ^i durch β und β^i bestimmt. Setzen wir

$$u_1 = \eta^i T_{ik} \eta^k, \quad u_2 = \beta^i T_{ik} \eta^k, \quad (29)$$

so haben wir

$$u = \beta u_1 + u_2. \quad (30)$$

Beim Bestehen der Einsteinschen Gleichungen sind u_1 und u_2 tatsächlich Zustandsgrößen. Indem wir β (und β^i) als vorgegeben, die Grösse P charakterisierend, betrachten, ist daher P eine Zustandsgrösse!

Um dies näher darzulegen, betrachten wir zunächst das Folgende: Die Raum-Zeit-Metrik induziert auf Ω eine Metrik, so dass wir Ω als einen Riemannschen Raum ansehen können. Wir können dann, ohne Ω zu verlassen, auf Ω einen Skalar bilden, den Krümmungsskalar $R(\Omega)$. $R(\Omega)$ ist eine Zustandsgrösse.

Durch Ausrechnen finden wir beim Bestehen der Einsteinschen Gleichungen die folgenden Formeln:

$$u_1 = \frac{1}{2\kappa} R(\Omega) + \frac{1}{8\kappa} (\Omega_i^i \Omega_j^j - \Omega_i^j \Omega_j^i), \quad (31)$$

$$u_2 = \frac{1}{2\kappa} \beta^k (\partial_j \Omega_k^j - \partial_k \Omega_j^j). \quad (32)$$

(31) sieht man sofort an, dass u_1 Zustandsgrösse ist, bei (32) zeigt ein genaueres Betrachten, dass man zur Ausrechnung mit Differentiationen innerhalb Ω auskommt. Eine ausführliche Herleitung findet sich in [4], eine nicht völlig kovariante Formulierung bei BRILL [6]. (Durch ein Versehen hat sich in die Arbeit⁶ ein falscher Zahlenfaktor eingeschlichen. Die Vorzeichenunterschiede entstehen durch andere als die in dieser Arbeit verwendete Konventionen.)

6. Die Gravitationsenergie

Eine Metrik ist statisch, wenn es zwei Funktionen f und h so gibt, dass

$$\xi^i = h \cdot g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^k} \quad \text{mit} \quad \xi^i \xi_i > 0 \quad (33)$$

ein zeitartiges Killingfeld ist. Die durch $f = \text{const.}$ gegebenen Hyperflächen sind dann zeitartig und stationär. Da ξ^i Killingsch ist, hängt die zugehörige dynamische Grösse *nicht* von der Wahl der Hyperfläche ab, weshalb wir eine stationäre zur Berechnung wählen können. Es ist dann $\Omega_{ik} = 0$ und (31) bzw. (32) vereinfacht sich zu

$$u_1 = \frac{1}{2\kappa} R(\Omega), \quad u_2 = 0. \quad (34)$$

Daher ist

$$P(\xi^i) = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \beta R(\Omega) dv(\Omega), \quad \beta = \xi^i \eta_i. \quad (35)$$

Wir wenden dies auf ein in Newtonscher Näherung bestimmtes Linien-element an. Bezeichnet Δ den Laplace-Operator, grad den Gradienten des 3-dimensionalen euklidischen Raumes und ϱ eine vorgegebene Massenverteilung, so ist das Newtonsche Potential durch

$$\Delta\varphi = 4\pi\gamma\varrho, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi = 0 \quad (36)$$

bestimmt. Wir setzen $m = \int \varrho d^3x$. Die verschiedenen Näherungsverfahren liefern dann eine Metrik der Gestalt

$$A dx^{02} - B \delta_{\nu\mu} dx^\nu dx^\mu \quad (37a)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= 1 + \psi + \lambda \psi^2 + \dots, \\ B &= 1 - \psi + \mu \psi^2 + \dots, \\ \psi &= \frac{2\varphi}{c^2}. \end{aligned} \quad (37b)$$

Das Killingfeld ξ^i ist in dem vorliegenden Koordinatensystem einfach durch $\xi^i = \delta_0^i$ gegeben.

Wir berechnen alles bis zur zweiten Ordnung in ψ und vernachlässigen alle Glieder, die in ψ von mindestens dritter Ordnung sind. Da sich zeigt, dass $R(\Omega)$ keine Glieder 0-ter Ordnung besitzt, brauchen wir

$$\beta dV(\Omega) = \sqrt{AB^3} d^3x \quad (38a)$$

nur bis zur ersten Ordnung auszurechnen:

$$\sqrt{AB^3} = 1 - \psi + \dots \quad (38b)$$

Nun ist

$$BR(\Omega) = -2B^{-1}\Delta B + \frac{3}{2}B^{-2}(\text{grad } B)^2, \quad (39a)$$

und daher in unserer Näherung

$$BR(\Omega) = 2\Delta\psi - 2\mu\Delta\psi^2 + 2\psi\Delta\psi + \frac{3}{2}(\text{grad } B)^2. \quad (39b)$$

Aus (38b) sehen wir, dass bis zu Gliedern erster Ordnung B gleich $\sqrt{AB^3}$ ist. Da $R(\Omega)$ von erster Ordnung ist, folgt

$$\beta R(\Omega) dv(\Omega) = \left(2\Delta\psi - 2\mu\Delta\psi^2 + 2\psi\Delta\psi + \frac{3}{2}(\text{grad } \psi)^2 \right) d^3x. \quad (40)$$

Unter Beachtung von

$$\Delta\psi^2 = 2\psi \Delta\psi + 2(\text{grad } \psi)^2 \quad (41)$$

setzen wir (40) in (35) ein und erhalten

$$P(\xi^i) = \frac{1}{x} \int \Delta\psi d^3x + \frac{1}{x} \int [\tau_1 (\text{grad } \psi)^2 + \tau_2 \psi \Delta\psi] d^3x + \dots \quad (42)$$

mit

$$\tau_1 = \frac{3}{4} - 2\mu, \quad \tau_2 = 1 - 2\mu. \quad (42a)$$

Beachten wir

$$\int \psi \Delta\psi d^3x = - \int (\text{grad } \psi)^2 d^3x,$$

so haben wir

$$P(\xi^i) = \frac{1}{x} \int \Delta\psi d^3x - \frac{1}{4x} \int (\text{grad } \psi)^2 d^3x + \dots \quad (43)$$

Da die Koeffizienten λ und μ herausgefallen sind, kommen wir zu dem erstaunlichen Ergebnis: Die Glieder von höherer als der *ersten* Ordnung in $\psi = 2\varphi/c^2$ der Metrik (37) haben keinen Einfluss auf die Grösse $P(\xi^i)$ bis zur *zweiten* Ordnung in ψ .

Der Koeffizient μ regelt nach (42) offenbar die lokale Verteilung der zu $P(\xi^i)$ gehörenden Dichte.

Die weitere Ausrechnung von (43) ergibt einfach

$$P(\xi^i) = mc^2 - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\text{grad } \varphi)^2 d^3x + \dots \quad (44)$$

Das nach Obigem durch die Glieder erster Ordnung der Metrik bestimmte Glied zweiter Ordnung von $P(\xi^i)$ ist einfach die Newtonsche Gravitationsenergie.

Formel (43) gestattet ein wesentliche Verallgemeinerung, wenn man als Ausgangspunkt der Approximation nicht die Minkowskische sondern eine beliebige Metrik verwendet. Gilt für die betrachtete Hyperfläche $\Omega_{ik} \neq 0$, so treten in (43) noch zusätzliche Terme auf. Für dieses Problem siehe [4].

7. Vertauschungsregeln der Quantentheorie

Wir haben bereits bei der Definition der Grössen $P(\xi^i, \Omega)$ bemerkt: Durch die Annahme, dass die ξ^i ein beliebiges Vektorfeld bilden, werden mit Notwendigkeit auch im Bereich der SRT neue, üblicherweise nicht definierte

Größen eingeführt. Betrachten wir nun die Quantentheorie und legen uns dabei auf das Heisenberg-Bild fest. Die zehn Operatoren, die zu den allgemeinen dynamischen Erhaltungsgrößen gehören, unterliegen Vertauschungsregeln. Daher müssen, wenn $\mathbf{P}(\xi^i, \Omega)$ den zur beobachtbaren Größe $P(\xi^i, \Omega)$ gehörenden Operator bezeichnet, auch die $\mathbf{P}(\xi^i, \Omega)$ irgendwelchen Vertauschungsregeln unterliegen. Wenn wir annehmen, dass diese Vertauschungsregeln nicht vom speziellen physikalischen System abhängen, sondern ähnlich wie die zu Energie, Impuls, Drehimpuls und Schwerpunktsgrößen gehörenden nur mit der Geometrie der Raum-Zeit verbunden sind, so scheint es *nur eine* Möglichkeit einer folgerichtigen Verallgemeinerung zu geben.

Nehmen wir zunächst die SRT. Ist ξ^i ein Killingvektor, so ist $\mathbf{P}(\xi^i)$ eine Linearkombination des Operators des Energie-Impuls-Vektors \mathbf{P}_i und des Drehimpulstensors \mathbf{M}_{ik} . Es ist

$$\mathbf{P}(\xi^i) = \alpha^n P_n + \beta^{nm} \mathbf{M}_{nm} \quad (45)$$

falls

$$\xi^i = \alpha^i + \beta_k^i x^k \quad (11)$$

ist. Da die $i\mathbf{P}(\xi^i)$ eine Darstellung der Lie-Algebra der Lorentz-Gruppe sind, ist

$$i[\mathbf{P}(\xi^i), \mathbf{P}(\eta^j)] = \mathbf{P}(\zeta^i) \quad (46)$$

mit einem gewissen Killingfeld ζ^i . Die kontravarianten Killingfelder repräsentieren aber gerade dann die Lie-Algebra der Lorentz-Gruppe, wenn man

$$\zeta^i = \xi^l \frac{\partial}{\partial x^l} \eta^i - \eta^l \frac{\partial}{\partial x^l} \xi^i \quad (47)$$

setzt. Man sieht dies sofort, wenn man die Gleichung

$$\zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \left[\xi^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \eta^s \frac{\partial}{\partial x^s} \right] \quad (47a)$$

betrachtet; denn die Zuordnung

$$\sigma(\lambda) \rightarrow \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \varphi$$

ist eine treue Darstellung der Lie-Algebra im Raum der Skalare. Bemerken wir noch, dass (46) und (47) alle Vertauschungsregeln zwischen den \mathbf{P}_i und \mathbf{M}_{ik} liefern.

Aus (47a) sieht man leicht die folgende Tatsache: Sind ξ^i und η^i beliebige kontravariante Vektorfelder, so wird durch (47) ein kontravariantes Vektorfeld ζ^i gegeben; die Bildung (47) ist koordinatenunabhängig und unabhängig von der Metrik. Tatsächlich kann man zeigen, dass die kontravarianten Vektor-

felder zusammen mit der gewöhnlichen Addition und der Operation (47) (= Lie-Multiplikation) eine treue Darstellung der Lie-Algebra der Gruppe aller eindeutigen (genügend regulären) Abbildungen von M auf sich bilden.

Für eine Feldtheorie mit einem lokalen (pseudo-)skalaren Feld kann man relativ leicht zeigen, dass gilt [4]: Ist Ω eine beliebige raumartige Hyperfläche und ξ^i, η^i zwei beliebige Vektorfelder, so gilt bei beliebiger Metrik

$$i[\mathbf{P}(\xi^j, \Omega), \mathbf{P}(\eta^j, \Omega)] = \mathbf{P}(\zeta^j, \Omega), \quad (48)$$

wobei ζ^i durch (47) gegeben ist. Dabei ist

$$\mathbf{P}(\xi^i, \Omega) = \int_{\Omega} \xi^i \mathbf{T}_{ik} df^k \quad (49a)$$

und die Lagrange-Funktion von der Gestalt

$$L = \partial^i \varphi \cdot \partial_i \varphi + \Sigma a_k \varphi^k \quad (49b)$$

angenommen worden.

Die vermutliche allgemeine Gültigkeit von (48) wird auch dadurch gestützt, dass (wie in der Theorie der geometrischen Objekte gezeigt wird) die Vorschrift (47) die einzige Möglichkeit ist, aus zwei gegebenen Vektorfeldern ohne Zuhilfenahme weiterer Felder (Metrik, affiner Zusammenhang u. ä.) ein drittes kontravariantes Vektorfeld aufzubauen.

Sind ξ^i und η^i Killingsch, so ist auch ζ^i ein Killingfeld und die in (48) stehende Abhängigkeit von Ω ist nur scheinbar.

Zum Schluss wollen wir noch bemerken, dass für ein durch (49) definiertes Feld überdies

$$i[\mathbf{P}(\xi^j, \Omega), \varphi] = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \varphi \quad \text{für } Q \in \Omega \quad (50)$$

gilt. (50) besitzt eine Verallgemeinerung für nicht skalare quantisierte Felder, die im Falle der SRT mit den üblichen Regeln identisch ist [4].

LITERATURANGABEN UND HINWEISE

1. P. G. BERGMANN, Phys. Rev., **112**, 287, 1958. Im Sinne der in unserer Arbeit benutzten Definition sind die Koordinaten nur Hilfsgrößen zur Parametrisierung von M .
2. A. TRAUTMAN, Bull. Acad. Pol. Scin. Cl. III, **4**, 671, 1956, sowie **5**, 721, 1957; Lectures on General Relativity, King's College, London, 1958.
3. P. A. M. DIRAC, z. B. Rev. Mod. Phys., **21**, 392, 1949; Phys. Rev. Letters, **2**, 368, 1959.
4. Für den Beweis dieser und vieler anderer hier aus Raumgründen nur referierten Ergebnisse sowie für weitere Literatur siehe: A. UHLMANN, Der Begriff der Energie bei gekrümmter Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, Wiss. Zschr. Friedrich-Schiller-Univ., Jena, **9**, 459, 1960.
5. E. T. NEWMAN, A. I. JANIS, Rigid Frames in Relativity, preprint 1960; N. ROSEN, Phys. Rev., **71**, 54, 1947.
6. D. BRILL, Ann. of Phys., **7**, 466, 1959.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

А. УЛЬМАНН

Резюме

На некотором множестве пространства времени определяется и исследуется класс динамических величин. Как классически, так и квантовомеханически определяется связь данного класса со специальной теорией относительности. Принимая во внимание канонический формализм, приходим к заключению, что эти величины являются функциями состояния. Найдутся рациональные законы сохранения. В приближении Ньютона однозначно получается сдвиг гравитационной энергии. Координатные системы применяются исключительно для проведения вычислений.