Bemerkung über die Darstellung der Gruppe der Raum-Zeit-Translationen im Heisenberg-Bild. (Zusammenfassung)

von

A. Uhlmann, Leipzig, Theoretisch-Physikalisches Institut
der Karl-Marx-Universität

- -

Jeder Translation

$$x^i \longrightarrow x^i + a^i$$

im Minkowski-Raum entspricht ein unitärer Operator $\mathcal{U}(\underline{a})$ ($\underline{a}$ bezeichnet den Vektor a^i) im Hilbert-Raum der Heisenberg'schen Zustandsvektoren: Die Zustandsvektoren im Heisenberg-Bild geben eine Darstellung der Gruppe der Raum-Zeit-Translationen, die unitär ist.

Bezeichnet $\underline{P} = (P_i)$ den Energie-Impuls-Operator und ist $\underline{a}$ ein beliebiges (konstantes und reelles) Vektorfeld, so gilt bekanntlich

$$\underline{a} \cdot \underline{P} = \frac{1}{i} \lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathcal{U}(\lambda \underline{a}) - 1}{\lambda} .$$

Die Forderung nach Spektralität kann man wie folgt berücksichten: Liegt der Vektor $\underline{a}$ im Vorwärts-Kegel, so ist

$$\langle | \underline{a} \cdot \underline{P} | \rangle \geq 0$$

für jeden Heisenberg-Zustandsvektor $|\rangle$, d.h. $\underline{a} \cdot \underline{P}$ ist positiv semidefinit immer dann, wenn $\underline{a}$ im Vorwärtskegel liegt.

Wir setzen

$$\underline{w} = \underline{a} + i\underline{b} .$$

Genau dann kann man eine von den komplexen Variablen $\underline{w}$ abhängigen Operator $\mathcal{U}(\underline{w})$ finden mit

(1) $\mathcal{U}(\underline{w}) = \mathcal{U}(\underline{a})$ für Im $\underline{w} = 0$,

(2) $\mathcal{U}(\underline{w})$ ist definiert und stetig im Bereich der $\underline{w}$, für die Im $\underline{w}$ im Vorwärtskegel liegt,

(3) $\mathcal{U}(\underline{w})$ ist analytisch im Bereich
Im $\underline{w}$ = zeitartig und vorwärts gerichtet,

wenn die Spektralitätsforderung erfüllt ist.

Obwohl das durch (3) beschriebene Gebiet die (reelle) Dimension 8 besitzt und daher sein Rand 7-dimensional ist, gibt es genau eine Fortsetzung von $\mathcal{U}(\underline{a})$ in dieses Gebiet:

Das nur 4-dimensionale Randstück Im $\underline{w}$ = 0 ist eine "Bestimmungfläche".

Aus diesem Resultat ergibt sich eine einfache Herleitung der Analytizität von Vakuumerwartungswerten. In der Tat ist

$$\langle \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\ldots\rangle_0 = \langle \varphi_1(0)\,\mathcal{U}(x_2-x_1)\,\varphi_2(0)\ldots\rangle,$$

mit beliebigen Heisenberg-Operatoren $\varphi_k(x)$. Die Operatoren $\mathcal{U}(x_2-x_1)$ gestatten aber nach Obigem die gewünschte Fortsetzung.

Nach einem Theorem von Neumark kann zu jeder unitären Darstellung einer lokal-bikompakten kommutativen Gruppe eine Art Spektralintegral gefunden werden. Wir schreiben dieses gleich unter Berücksichtigung der Spektralitätsforderungen auf.
Ein Projektor ist ein Operator E mit $E = E^*$ und $E^2 = E$. Unter einem Spektralmaß $dE(\underline{k})$ auf dem Vorwärtskegel verstehen wir folgendes:

a) Jeder Teilmenge G des Vorwärtskegels ist ein Projektor $E(G)$ zugeordnet:

$$E(G) = \int_G dE(\underline{k}).$$

b) Für jeden Heisenberg-Zustandsvektor $|\rangle$ ist

$$G \longrightarrow \langle|E(G)|\rangle$$

ein Maß. (Wir betrachten nur Borelsche Mengen G.)

Wir können $\mathcal{U}(\underline{w})$ durch ein Operator-integral ausdrücken:

$$\mathcal{U}(\underline{w}) = \int_{\text{Vorwärtskegel}} \exp(i\underline{w}\underline{k})\,dE(\underline{k}).$$

Wir wollen schließlich noch einige einfache Bemerkungen anschließen:

A) Der Operator der Ruhemasse M ist durch $M = \int \sqrt{k^2}\,dE(\underline{k})$

gegeben. Die Darstellung $\mathcal{U}(\underline{w})$ genügt der Gleichung

$$\Box\,\mathcal{U} + M^2\,\mathcal{U} = 0$$

B) Ist $|\rangle$ irgendein Heisenberg-Zustandsvektor, so gilt

$$|\langle|\mathcal{U}(\underline{w})|\rangle| \leq \langle|\exp(-\sqrt{\underline{b}^2}\,M)|\rangle$$

mit

$$\underline{b} = \mathrm{Im}\,\underline{w}\quad,$$

C) Es bezeichne $\rho(x^2)$ die Lehmann-Källen-Spektralfunktion einfachheitshalber für ein skalares Feld $\varphi(x)$.
Sei $\underline{k}_0$ ein Vektor aus dem Vorwärtskegel und bezeichne $G \to \underline{k}_0$ eine Folge von Gebieten, die sich auf k_0 zusammenzieht, dann haben wir

$$\rho(k_0^2) = (2\pi)^3 \lim_{G\to k_0} \frac{\langle\varphi(0)\,E(G)\,\varphi(0)\rangle_0}{v(G)}\ .$$

Dabei ist $v(G)$ das 4-Volumen von G.