ZUR LOKALISIERUNG DER ENERGIE IN DER ALLGEMEINEN RELATIVITÄTSTHEORIE

A. UHLMANN

Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität, Jena

(Eingegangen am 3. Juni 1959)

Aufbauend auf Ergebnissen von Möller wird untersucht, in welchem Maße ein Energiebegriff, der sich auf eine affine Tensordichte τ_i^k mit $\tau_{i,k}^k = 0$ stützt, eine Lokalisierung gestattet.

1.

Ist M die Mannigfaltigkeit der Raum-Zeit-Punkte und erfüllt der auf M gegebene metrische Tensor g_{ik} die Einsteinschen Gleichungen

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2}\, g_{ik}\, R = -\, \varkappa\, T_{ik}$$

so sollte der Begriff der Energie E nur von der metrischen Fundamentalform $ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$ und von einer (möglichen) Gesamtheit voneinander unabhängiger Beobachter abhängen. Es sollte deshalb E ein Funktional nur von ds^2 und einer raumartigen Punktmenge Ω aus M sein:

$$E = E\,[ds^2, \Omega]. \tag{1}$$

Es ist dann E der Energieinhalt des in Ω lokalisierten (Teiles des) physikalischen Systems.

Wir können zur Vereinfachung annehmen, daß Ω ein Stück einer raumartigen (3-dimensionalen) Hyperfläche ist. Man wird dann erwarten, daß E das Integral über eine Energiedichte ist, das über Ω erstreckt ist:

$$E = \int_{\Omega} h\, dV \tag{2}$$

Versteht man hierbei unter dV das durch die Beschränkung der Metrik ds^2 auf Ω auf dieser Hyperfläche definierte Volumenelement, so ist dV nur von ds^2 und Ω abhängig. (1) ist deshalb genau dann erfüllt, wenn h nur von ds^2, von Ω und von den auf Ω liegenden Weltpunkten P abhängt:

$$h = h\,[ds^2, \Omega, P], \qquad P \in \Omega \tag{3}$$

2.

Sei Ω eine Hyperfläche und P_0 einer ihrer Punkte. Es gibt dann eine Umgebung U von P_0 und eine dort erklärte Funktion f mit

$$P \in \Omega \cap U \longleftrightarrow f(P) - f(P_0) = 0, \qquad P \in U \tag{4a}$$

und

$$\sum \left| \frac{\partial f}{\partial x^i}(P) \right| \neq 0 \quad \text{für } P \in U. \tag{4b}$$

Genau dann ist bekanntlich Ω raumartig in den eben betrachteten Punkten, wenn grad f ein zeitartiges Vektorfeld ist.

Wir können Ω somit durch Funktionen der Eigenschaft (4) charakterisieren. Damit die Funktionen f und f' die gleiche Hyperfläche Ω charakterisieren, ist notwendig und hinreichend, daß die Pfaffschen Formen df und df' gleichzeitig auf Ω verschwinden. Sind x^1, x^2, x^3 drei Funktionen, die f zu einem Koordinatensystem $\{x^i\} = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ mit $x^4 = f$ ergänzen, so heißt das

$$df' = A\, df + B_1\, dx^1 + B_2\, dx^2 + B_3\, dx^3, \quad B_k(P) = 0 \text{ für } P \in \Omega. \tag{5}$$

Charakterisieren wir nun Ω (stückweise) durch ein Koordinatensystem $\{x^i\}$ und die Bedingung $x^4 - x^4(P_0) = 0$. Wenigstens für genügend kleine Stücke von Hyperflächen können wir dann

$$h = h\,[ds^2, \{x^i\}, P], \qquad x^4(P) - x^4(P_0) = 0 \tag{6}$$

setzen mit irgendeinem Punkt $P_0 \in \Omega$.

Wegen (3) muß dann gelten

$$h\,[ds^2, \{x^i\}, P] = h\,[ds^2, \{y^i\}, P] \tag{7a}$$

falls

$$\frac{\partial y^4}{\partial x^k}(P) = 0 \text{ für } k = 1, 2, 3 \text{ und } x^4(P) - x^4(P_0) = 0 \tag{7b}$$

ist.

Die Bedingung (7) ist notwendig und hinreichend für die Darstellung der Energiedichte h in der Form (3) und somit auch für die Darstellung der Energie in der Form (1). Mit anderen Worten: (7) sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lokalisierbarkeit der Energie.

3.

Die in (7) zugelassenen Koordinatentransformationen enthalten unter anderen diejenigen der Form

$$y^4 = x^4, \quad y^k = A^k(x^1, x^2, x^3), \quad k = 1, 2, 3. \tag{8}$$

Gegenüber diesen ist die Möllersche Energiedichte [1], [2] h invariant. Möllers Energiedichte ist aber nicht invariant gegenüber allen in (7) zugelassenen Transformationen.

Ist z. B. Ω durch $x^4 = 0$. gegeben, so ist Ω auch durch $y^4 = 0$ gegeben, wenn $x^4 = s \cdot y^4$ und $s \neq 0$ auf Ω ist. Wir können nun x^r und y^r ($r = 1, 2, 3$) so wählen, daß sowohl für die Komponenten g_{ik} des metrischen Tensors bezüglich $\{x^i\}$ als auch für seine Komponenten g_{ik}' bezüglich $\{y^i\}$ die Relation $g_{i4} = g_{i4}' = 0$ für $i = 1, 2, 3$ gilt. Betrachten wir mit den so konstruierten Koordinatensystemen die nach (7) zulässige Transformation

$$y^k = A^k(x^1, x^2, x^3, x^4), \qquad k = 1, 2, 3, \qquad y^4 = s \cdot x^4. \tag{9}$$

Gl. (7b) ist erfüllt, weil x^4 auf Ω konstant ist.

Wegen $g_{i4} = 0$ für $i \neq 4$ gilt nach Möller [1], [2]

$$h = \frac{2}{\varkappa} \Delta \sqrt{-g_{44}}. \tag{10}$$

Hierbei ist Δ der Laplace-Beltrami-Operator, der zu der auf Ω induzierten Metrik gehört. Δ hängt also nur von ds^2 und Ω ab. Beim Koordinatenwechsel (9) wird aber

$$g_{44} \to s^{-2} g_{44} = g_{44}' \tag{9a}$$

für Punkte von Ω und somit wird

$$h = \frac{2}{\varkappa} \Delta \sqrt{-g_{44}} \to h' = \frac{2}{\varkappa} \Delta\, s^{-1} \sqrt{-g^{44}}. \tag{9b}$$

Offensichtlich kann s so gewählt werden, daß $h \neq h'$ ist. Also ist in Möllers Formalismus

$$h \neq h\,[ds^2, \Omega, P] \quad \text{bzw.} \quad E \neq E\,[ds^2, \Omega] \tag{11}$$

4.

Betrachten wir nun (11) im Hinblick auf den Möllerschen Eindeutigkeitssatz [2]. Hiernach gibt es nur eine Größe $\mathcal{T}_i^k$, die erstens eine affine Tensordichte ist, zweitens die Gleichung $\mathcal{T}_{k,i}^k = 0$ erfüllt und deren zugeordnete Energiedichte h (mindestens) unter der Gruppe (8) invariant ist. Diese durch obige Forderungen eindeutig bestimmte Energiedichte h ist nach [2] gerade durch (10) gegeben. Da die Forderung, daß $\mathcal{T}_i^k$ eine affine Tensordichte ist, im Wesentlichen aus der Forderung nach Invarianz der Gl. $\mathcal{T}_{i,k}^k = 0$ entspringt, erlaubt Formel (11) folgenden Schluß:

Es gibt keine affine Tensordichte, die nur von der Metrik abhängt und die es gestattet, die Energie als Funktional raumartiger Gebilde zu betrachten.

Die beiden Forderungen: $\mathcal{T}_i^k$ ist affine Tensordichte und $\mathcal{T}_{i,k}^k = 0$ sind also mit der Forderung nach strenger Lokalisierbarkeit der Energie nicht vereinbar.

Diese Schlußfolgerung als auch die des Abschnittes 6 gelten allerdings nur unter der Annahme, daß $\mathcal{T}_i^k$ höchstens Abteilungen zweiter Ordnung von g_{ik} enthält. Es erscheint jedoch unwahrscheinlich, daß sich durch Einführung höherer Ableitungen die Situation grundlegend ändern könnte.

5.

Der eben erwähnte Möllersche Eindeutigkeitssatz gestattet es abzuschätzen, bis zu welchem Grade eine Lokalisierung der Energie vorliegen kann, wenn eine affine Tensordichte mit $\mathcal{T}_{i,k}^k = 0$ zugrunde gelegt wird. Zu diesem Zwecke betrachten wir die vorgegebene raumartige Hyperfläche Ω als eingebettet in eine einparametrische Schar $\Sigma(\lambda)$ von Hyperflächen. Wir können annehmen, daß $\Sigma(\lambda)$ für Werte von λ in der Nähe von $\lambda = 0$ definiert ist und daß $\Omega = \Sigma(0)$ ist. Eine solche Schar können wir beschreiben durch Gleichungen der Form $f(P) = \lambda$ wobei grad f ein zeitartiges Vektorfeld ist. Insbesondere können wir f als vierte Komponente eines Koordinatensystems $\{x^i\}$ gewählt denken:

$$P \in \Sigma(\lambda) \longleftrightarrow x^4(P) = \lambda .$$

Ist $\{y^i\}$ ein anderes Koordinatensystem und soll $y^4(P) = \lambda'$ dieselbe Schar von Hyperflächen (jedoch möglicherweise mit einem anderen Parameter) beschreiben, so muß die Gl. (7b) nunmehr für alle Punkte der Hyperflächenschar gelten. D. h. an Stelle von (7b) tritt die schärfere Forderung

$$\frac{\partial y^4}{\partial x^k} = 0 \qquad \text{für} \qquad k = 1, 2, 3 \text{ und alle } P. \tag{13}$$

Es muß also sein:

$$y^4 = A(x^4); \quad y^k = A^k(x^1, x^2, x^3), \qquad k = 1, 2, 3, \tag{14}$$

wobei wir noch $g_{i4} = g'_{i4} = 0$ für $i \neq 4$ vorausgesetzt haben.
Aus (14) folgt

$$g^{44} \to \left(\frac{\partial A}{\partial x^4}\right)^{-2} g_{44}.$$

Möllers h geht deshalb wegen (10) in

$$\frac{2}{\varkappa} \Delta \left(\frac{\partial A}{\partial x^4}\right)^{-1} \sqrt{-g_{44}} = \left(\frac{\partial A}{\partial x^4}\right)^{-1} \cdot \frac{2}{\varkappa} \Delta \sqrt{-g_{44}}$$

über, da $\partial A/\partial x^4$ auf jeder Hyperfläche der Schar $\Sigma(\lambda)$ konstant ist. Mit der Konstanten

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x^4}\right)_{x^4 = 0} = a$$

transformiert sich also die Möllersche Energiedichte unter (14) gemäß

$$h \to a^{-1} h \tag{15a}$$

und somit

$$\int_{\Omega} h\, dV \to a^{-1} \int_{\Omega} h\, dV. \tag{15b}$$

Aus mathematischen Gründen erscheint es unwahrscheinlich, koordinatenunabhängige Bedingungen einzuführen, die bewirken, daß nur diejenigen Transformationen (14) mit $y^4 = x^4$ zulässig sind.

(15a) zeigt aber, daß wenigstens der Quotient $h(P_2)/h(P_1)$ für zwei Punkte von Ω koordinatenunabhängige Bedeutung besitzt. Dies kann man so aussprechen: Sei h Möllers Energiedichte, dann ist

$$\frac{h(P_1)}{h(P_2)} = \Phi\,[ds^2, \Omega, \Sigma(\lambda), P_1, P_2]$$

$$\text{mit } P_1, P_2 \in \Omega \text{ und } \Omega = \Sigma(0) \tag{16}$$

Hierbei ist $\Sigma(\lambda)$ eine Schar raumartiger Hyperflächen, die Ω enthält.

6.

Obwohl unwahrscheinlich, wollen wir doch annehmen, wir könnten eine zusätzliche Bedingung α einführen, die die zugelassenen Koordinatentransformationen nicht nur auf (14) sondern sogar auf (8) beschränkt. Unter solchen günstigen Umständen hätten wir an Stelle von (16)

$$h(P) = \Phi'\,[ds^2, \Omega, \Sigma(\lambda), \alpha, P]$$

$$\text{mit } P \in \Omega, \qquad \Omega = \Sigma(0) \tag{17}$$

zu schreiben.

Wir bemerken, daß nach dem Vorhergehenden und nach Möllers Eindeutigkeitssatz durch (17) die maximale Möglichkeit für die Lokalisierbarkeit des Energiebegriffes unter den gemachten Voraussetzungen über $\mathcal{T}_i^k$ gegeben ist. Jedoch ist (17) und noch prägnanter die daraus folgende Abhängigkeit

$$E = E\,[ds^2, \Omega, \Sigma(\lambda), \alpha], \qquad \Omega = \Sigma(0) \tag{18}$$

sehr fragwürdig. Tatsächlich müßte in die Messung der Energie durch auf Ω befindliche Beobachter die „Geschichte der Beobachter“ (und nicht die des Systems!) eingehen. D. h. die Energie würde nicht nur vom Bewegungszustand der Beobachter bei der Messung abhängen. Dies ist aber im Rahmen der klassischen Physik schwerverständlich. Will man also diese Härten der Interpretation umgehen, dann muß die Voraussetzung, daß $\mathcal{T}_i^k$ eine affine Tensordichte mit $\mathcal{T}_{i,k}^k = 0$ ist, fallengelassen werden. Eine kleine Chance besteht vielleicht auch in der Einführung höherer Ableitungen.

LITERATUR:

[1] C. Möller, *Ann. of Phys.*, **4**, 347, 1958

[2] C. Möller, *Über die Energie nichtabgeschlossener Systeme in der allgemeinen Relativitätstheorie.* In: *Max Planck Festschrift* 1958, S. 139/153; Berlin.