WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA • JAHRGANG 9 • 1959/60
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE REIHE • HEFT 1/2
HERAUSGEBER: DER REKTOR

Als Manuskript gedruckt

Aus dem Theoretisch-Physikalischen Institut, Direktor: Prof. Dr. K. Schuster

Über den Begriff der Energie bei gekrümmter Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit

Vorläufige Mitteilung

Von

ARMIN UHLMANN

M sei eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit, die eine Metrik $ds^2 = g_{ik} \cdot dx^i \cdot dx^k$ vom Typ $(+++-)$ trägt. Außerdem seien (nicht-metrische) physikalische Felder ψ_a gegeben, die zu einem Energie-Impuls-Tensor („Materie-Tensor") T_{ik} Anlaß geben. Von T_{ik} können wir $\partial^i T_{ik} = 0$ und $T_{ik} = T_{ki}$ voraussetzen. (∂_i bezeichnet die kovariante Ableitung.)

A. Allgemeines

1. Es ist jetzt fast allgemein anerkannt, daß den Koordinatensystemen $\{x^i\}$ auf M keine tiefere physikalische Bedeutung beizumessen ist: Sie sind Bezeichnungen zur Unterscheidung der Weltpunkte (= Punkte von M). Es handelt sich um „Namen", die den Weltpunkten fast willkürlich gegeben werden können, die aber, einmal festgelegt, ihre Unterscheidung bequem ermöglichen.

2. Gemäß **1.** sollte die Energie E eines Systems nicht von der Wahl von Koordinatensystemen abhängen. Man wird vielmehr bei obiger Voraussetzung zu schreiben haben

$$E = E\,[g_{ik},\, T_{ik}\,|\,\text{Beobachtungsbedingungen}].$$

Dies soll andeuten, daß die Energie ein „Funktional" der physikalischen Situation ist und andererseits aber von den Bedingungen der Beobachtung abhängt.

3. Die „Bedingungen der Beobachtung" werden wie folgt beschrieben:

a) Es muß angegeben werden, an welchen Weltpunkten die Messung der Energie vorgenommen wird. Diese Weltpunkte wird man kausal unabhängig, d. h. raumartig zueinander gelegen wählen. Wir behandeln insbesondere den Fall, daß die Messung auf (einem Teil) einer raumartigen Hyperfläche Ω ausgeführt wird.

b) E ist ferner abhängig vom Bewegungszustand der Beobachter, genauer von ihrer Geschwindigkeit relativ zum untersuchten Objekt. Diese Daten werden durch ein zeitartiges Vektorfeld ξ^i, das auf Ω gegeben ist, ausgedrückt.

a) und b) kommt von der Vorstellung, daß die „Geschichte der Beobachter" durch ein Weltlinienbündel dargestellt wird. Diese Beobachter nehmen beim Passieren einer raumartigen HFl. eine Messung vor: Diese raumartige HFl. ist gerade Ω, und die Tangenten des Weltlinienbündels an den Punkten von Ω bilden das zeitartige Vektorbündel ξ^i.

Man sieht, daß $\xi^i\,\xi_i = -1$ vorausgesetzt werden kann.

Ist η_i das Normalenbündel von Ω und ist $\xi_i = \eta_i$, so bedeutet dies, daß sich die Beobachter beim Passieren von Ω relativ zu Ω in Ruhe befinden.

4. Wegen **2.** und **3.** muß also

$$E = E\,[g_{ik},\, T_{ik}\,|\,\Omega,\, \xi^i],\quad \xi^i\, c\, \Omega,\quad \xi^i\,\xi_i = -1 \tag{1}$$

sein. $\xi^i\, c\, \Omega$ bedeutet, daß ξ^i nur für die Punkte von Ω definiert zu sein braucht.

Eine Formel der Struktur (1) erfüllt die Forderung **1.** Sie erfüllt ebenfalls automatisch die Forderung nach Lokalisierbarkeit, falls Ω ein beliebiges Hyperflächenstück sein darf.

5. Von einer Erhaltung der Energie können wir offenbar sprechen, wenn

$$E\,[g_{ik},\, T_{ik}\,|\,\Omega,\, \xi^i] = E\,[g_{ik},\, T_{ik}\,|\,\hat{\Omega},\, \hat{\xi}^i]$$

ist. Ebenso wichtig ist die Situation, wenn nicht zwei sondern eine ganze Schar $\Omega(s)$ von Hyperflächen gegeben ist. ξ^i ist dann ein Vektorfeld auf dem von den $\Omega(s)$ überdeckten Raum-Zeit-Gebiet. Wir haben dann

$$E(s) = E[g_{ik},\, T_{ik}\,|\,\Omega(s),\, \xi^i] \tag{2a}$$

und genau dann liegt Energieerhaltung vor, wenn

$$\frac{d}{ds}\, E(s) = 0 \tag{2b}$$

ist.

B. Formel für die Energie

6. Um die Formel (1) für den Energieinhalt herzuleiten, können wir berücksichtigen:

a) Ist der Raum M Minkowskisch, so geht (1) in den Energieausdruck der Speziellen Relativitätstheorie über.

b) Die Eigenschaften der Energie in der Speziellen Relativitätstheorie soll möglichst weitgehend gewahrt bleiben.

c) Das Äquivalenzprinzip.

d) Die näherungsweise Übereinstimmung mit dem Energieausdruck der Newtonschen Gravitationstheorie.

7. Die Berücksichtigung von **6.** führt eindeutig auf den Ausdruck

$$E = \frac{1}{3!} \int_{\Omega} \xi^i \, T_{ik} \, g^{kl_1} \, d x^{l_2} \wedge d x^{l_3} \wedge d x^{l_4} \; \delta^{1\,2\,3\,4}_{l_1 l_2 l_3 l_4} |g|^{\frac{1}{2}}, \qquad \xi^i \xi_i = -1 \quad (3)$$

Ist η^i das Normalenbündel von Ω, das so gerichtet ist, daß $\xi^i \eta_i < 0$ gilt und das auf -1 normiert ist, so kann man an Stelle von (3) auch schreiben

$$E = \int_{\Omega} \xi^i T_{ik} \, \eta^k \, d V.$$

dV ist hierbei das zu Ω gehörende invariante Volumenelement:

$$dV = \frac{1}{3!} \eta^i \in_{i l_1 l_2 l_3} d x^{l_1} \wedge d x^{l_2} \wedge d x^{l_3}.$$

8. Wir bemerken, daß aus

$$T_{ik} = 0 \qquad \text{stets} \qquad E = 0$$

folgt. Dies entspricht am konsequentesten dem Äquivalenzprinzip: Das Gravitationsfeld ist lokal einer Beschleunigung äquivalent (Einsteins Fahrstuhl-Experiment). Eine Beschleunigung „an sich" ist noch kein Träger von Energie (leerer Fahrstuhl). Erst das Vorhandensein von (nicht-metrischer) „Materie" ($T_{ik} \neq 0$) ergibt einen Energieinhalt.

C. Erhaltungssätze

9. In der Speziellen Relativitätstheorie wird ein allgemeiner Erhaltungssatz für die Energie gerade von Beobachtern festgestellt, die sich in einem Inertialsystem befinden. Beschleunigte Beobachter beobachten in der Speziellen Relativitätstheorie keine Energieerhaltung. Mit (3) läßt sich der Energieerhaltungssatz der Speziellen Relativitätstheorie wie folgt formulieren:

$$E\,[g_{ik}, T_{ik} \,|\, \Omega(s), \xi^i] = \text{konstant}, \quad \xi^i \xi_i = -1 \quad (4\text{a})$$

genau dann, wenn

$$\partial^k \xi^i = 0 \quad (4\text{b})$$

ist.

Oft fordert man noch, daß die Hyperflächen Ω flach sind. Dies ist jedoch unnötig, und die allgemeine Formulierung (4) ist mit dem Energieausdruck des Tomonaga-Schwinger-Formalismus identisch.

10. Der allgemeine Fall (g_{ik}, T_{ik} beliebig) lautet:

$$E\,[g_{ik}, T_{ik} \,|\, \Omega(s), \xi^i] = \text{konstant}, \quad \xi^i \xi_i = -1$$

falls

$$\partial^k \xi^i + \partial^i \xi^k = 0 \quad (4\text{c})$$

ist[1]). Dies verallgemeinert den Tomonaga-Schwingerschen Energieausdruck für beliebiges M.

Nicht in jedem Raum M gibt es jedoch solche Killingsche Vektorfelder (4c). Ihre Existenz bedeutet (wegen der Nebenbedingung $\xi^i \xi_i = -1$) eine gewisse zeitliche Isotropie. Ist darüber hinaus noch

$$\xi_i = a \frac{\partial b}{\partial x^i}$$

mit gewissen Funktionen a und b, so ist M im betrachteten Raum-Zeit-Gebiet sogar stationär[3]).

11. Bei **10.** haben wir nicht das Bestehen einer Relation zwischen g_{ik} und T_{ik} angenommen. Sei nun jedoch

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \varkappa T_{ik} \quad (5\text{a})$$

Ist dann Ω und ξ^i beliebig x und ist σ eine isometrische Abbildung von M auf sich, die Ω in $\hat{\Omega}$ und ξ^i in $\hat{\xi}^i$ überführt, so gilt

$$E[g_{ik}, T_{ik} \,|\, \Omega, \xi^i] = E\,[g_{ik}, T_{ik} \,|\, \Omega, \hat{\xi}^i] \quad (5\text{b})$$

Aus (5a) folgt also ein neuer Typ eines Erhaltungssatzes; denn im Gegensatz zu (4) ist an ξ^i keinerlei Forderung gestellt.

12. Ist schließlich σ eine beliebige topologisch Abbildung von M auf sich, die g_{ik} in g_{ik} und T_{ik} in T_{ik} sowie Ω in $\hat{\Omega}$ und ξ^i in $\hat{\xi}^i$ überführt, so folgt aus der Struktur von (3) allein, daß

$$E[g_{ik}, T_{ik} \,|\, \Omega, \xi^i] = E[\hat{g}_{ik}, \hat{T}_{ik} \,|\, \hat{\Omega}, \hat{\xi}^i]. \quad (6)$$

Wir können (6) als den dritten Typ einer Erhaltungsrelation ansehen.

D. Eigenschaften der Energie

13. Von den allgemeinen Eigenschaften des Energieausdruckes (3) wurde schon die Koordinatenunabhängigkeit, die Lokalisierbarkeit und die Struktur der Energieerhaltungssätze erwähnt. *Wir bemerken, daß jede der drei Eigenschaften mit Notwendigkeit zerstört wird, wenn „zusätzliche" metrische Energieanteile in Form von sogenannten affinen Pseudotensoren (bzw. -tensordichten) in die Theorie eingeführt werden.* Nach (8) scheint auch das Äquivalenzprinzip ein starkes Argument gegen eine solche Prozedur zu sein[4]).

Gegen die Einführung von zusätzlichen Gebilden, die den Tensor T_{ik} „ergänzen" und sich nicht homogen linear transformieren, sprechen auch die beiden folgenden Eigenschaften des Ausdrucks (3).

14. In der Allgemeinen Relativitätstheorie [Gültigkeit der Gleichung (5a)] sollte E nach Dirac ein Funktional des „Zustandes" sein. E darf danach nur von der Beschränkung der Metrik auf Ω und den Normalableitungen dieser Größen abhängen — vorausgesetzt, daß ξ^i die Richtung der Normalen von Ω besitzt.

Ist letztere Bedingung erfüllt, so folgt aus (3) und (5a)

$$E = \int_{\Omega} (A + B)\, dV \quad (7)$$

Hierbei ist dV das invariante Volumenelement von Ω, A bis auf einen Faktor der Krümmungsskalar des „Unterraumes Ω" von M. B dagegen ist eine Funktion der Metrik von Ω und eine *quadratische* Funktion der Normalableitung des auf Ω induzierten metrischen Tensors in Richtung der Normale von Ω. Der Ausdruck (3) erfüllt also die Forderung von Dirac.

15. Eine große Rolle spielt der Zusammenhang zwischen Energie und Impuls. Das einfache Verhalten dieser Größen im Minkowski-Raum ist freilich durch die Struktur der inhomogenen Lorentz-

Gruppe bedingt und ändert sich beim Übergang zu allgemeineren Räumen. Insbesondere kann bei gekrümmtem M kein linearer Impuls sinnvoll ausgezeichnet werden. Man kann nur von „generalisierten Impulsen" sprechen, die gleichzeitig den linearen und den Drehimpuls der Speziellen Relativitätstheorie verallgemeinern.

Wir betrachten das Funktional

$$\Phi\,[g_{ik}, T_{ik}\,|\,\Omega, \eta^i] = = \frac{1}{3!}\int\limits_{\Omega} \eta^i\, T_{ik}\, g^{kl_1} \in_{l_1 l_2 l_3 l_4} d\,x^{l_2} \wedge d\,x^{l_3} \wedge d\,x^{l_4}, \quad (8)$$

das wir als „Projektion des Energie-Impuls-Tensors T_{ik} auf das Vektorfeld η^i bezüglich der Hyperfläche Ω" bezeichnen können. Wir können diese Größe als einen generalisierten Impuls in η^i-Richtung ansehen.

Ist η^i ein Killingsches Vektorfeld, so ist (8) von der gewählten räumlichen Hyperfläche unabhängig. Überhaupt übertragen sich die Betrachtungen von Abschnitt C ganz auf das Funktional (8). Setzt man in (8) die Killingschen Vektoren der Speziellen Relativitätstheorie ein, so erhält man gerade die mechanischen Größen, für die ein Erhaltungssatz gilt[5]).

E. Quantentheorie

Bisher ist keine erfolgreiche Quantentheorie bekannt, in der die g_{ik} als q-Zahlen angesehen werden. Der tiefere Grund ist wahrscheinlich die Tatsache, daß elementare Axiome der Quanten(feld)theorie erst beim Vorliegen einer festen (c-Zahl-)Metrik sinnvoll werden. Zum Beispiel ist die Frage, ob zwei an verschiedenen Weltpunkten durchgeführte Messungen unabhängig sein müssen oder nicht, nur bezüglich einer bestimmten Metrik sinnvoll.

Ebenso steht es mit Begriffen wie „zeitartig", „raumartig", „kausal" u. ä., die bei gequantelten g_{ik} „unscharf" werden können. Man kann deshalb zur Zeit nur hoffen, daß die Vertauschungsregeln für den Fall, daß die g_{ik} als c-Zahlen behandelt werden, den exakten stark ähneln.

16. In der Speziellen Relativitätstheorie kann man mit Hilfe des Funktionals (8), in dem T_{ik} q-Größen, g_{ik} und ξ^i aber c-Zahlen sind, die Vertauschungsrelationen

$$i[P_k, \psi_a] = \partial_k\, \psi_a, \qquad (\times)$$

$$i[J_{lk}, \psi_a] = (x_k\, \partial_l - x_l\, \partial_k)\, \psi_a + S^{\beta}_{lk\,a}\, \psi_\beta$$

und alle hieraus möglichen Kombinationen wie folgt zusammenfassen, wobei wir zur Abkürzung die alternierende Form

$$\Theta_i = \frac{1}{3!}\, T_{ik}\, g^{ks} \in^{s r_1 r_2 r_3} d\,x^{r_1} \wedge d\,x^{r_2} \wedge d\,x^{r_3}$$

einführen.

Es ist

$$i\left[\int\limits_{\Omega} \eta^i\, \Theta_i, \psi_a(Q)\right] = I(\eta^i)\, \psi_a(Q), \quad Q \varepsilon \Omega. \qquad (9\text{a})$$

Dabei ist η^i ein Killing-Vektorfeld und $I(\eta^i)$ ist durch

$$\lim_{s \to 0} \frac{\sigma(s)\, \psi_a - \psi_a}{s} = I(\eta^i)\, \psi_a \qquad (9\text{b})$$

gegeben[2]). $\sigma(s)$ ist diejenige einparametrige Untergruppe der inhomogenen Lorentzgruppe, für die

$$\lim_{s \to 0} \frac{\sigma(s)\, x^i - x^i}{s} = \eta^i \qquad (9\text{c})$$

gilt.

Durchläuft $\sigma(s)$ alle einparametrigen Untergruppen der inhomogenen Lorentzgruppe, so werden durch (9a) alle Vertauschungsrelationen ($\times$) und ihre Kombinationen geliefert. Die Gesamtheit aller Vertauschungsregeln und ihre Kombinationen zwischen den P_k und den J_{es} wird durch

$$i\left[\int\limits_{\Omega} \eta^i\, \Theta_i, \int\limits_{\Omega} \xi^i\, \Theta_i\right] = \int\limits_{\Omega} \zeta^i\, \Theta_i \qquad (10\text{a})$$

geliefert. Dabei ist

$$\zeta^i = \eta^l \frac{\partial}{\partial x^l}\, \xi^i - \xi^l \frac{\partial}{\partial x^l}\, \eta^i, \qquad (10\text{b})$$

$$I(\zeta^i) = [I(\eta^i), I(\xi i)].$$

Schließlich gilt, da die η^i Killing-Vektoren sind,

$$\int\limits_{\Omega} \eta^i\, \Theta_i = \int\limits_{\Omega^*} \eta^i\, \Theta_i \qquad (11)$$

für zwei raumartige HFl., wodurch die Erhaltungssätze gegeben sind. Die Formeln (9), (10) und (11) enthalten insbesondere den Tomonaga-Schwinger-Formalismus in kompakter Form.

Die entscheidende Frage ist, inwiefern diese Formeln von der Eigenschaft der η^i, Killing-Felder zu sein, abhängt. (11) kann für beliebige Felder nicht gelten. Aber die Formeln (9) und (10) sind nicht nur auf Killing-Felder beschränkt, sondern gelten (unter geeigneten Annahmen) allgemein. Sie sind überdies nicht explizit von der Metrik abhängig.

17. Wir gehen nun zu einem beliebigen Raum M mit beliebiger Metrik über. Ist η^i irgendein Vektorfeld, so wird durch

$$\eta^i(x^l) = \frac{d}{d\,s}\, \varphi^i(x^l, s), \quad x^i = \varphi^i(x^l, 0),$$

$$x^i(Q^{\sigma(s)}) = \varphi^i(x^k(Q), s)$$

bekanntlich eine einparametrige Gruppe $\sigma(s)$ definiert, für die (9c) gilt. Für zwei Vektorfelder η^i und ξ^i wird durch (10b) ein Vektorfeld ζ gegeben, und auch der Zusammenhang zwischen den Operatoren $I(\eta^i)$ ist gewahrt. Die $I(\eta^i)$ sind auch hier durch (9b) definiert.

Unter der Voraussetzung, daß sich die Vertauschungsregeln zwischen den Feldfunktionen auf raumartigen Hyperflächen wie die Greenschen Funktionen der Gleichungen für die Feldfunktionen verhalten, wird man die Formeln (9a) und (10a) ganz allgemein beweisen können. (Man muß noch eine Aussage über die Struktur des Energie-Impuls-Tensors voraussetzen.)

Aus der Gültigkeit von (10a) können wir auf (9a) schließen, so daß die Formeln (9) und (10) die konsequente Verallgemeinerung der Vertauschungsrelationen ($\times$) und ihrer Folgerelationen im Falle beliebiger Vektorfelder und beliebig gekrümmter Raum-Zeit ist. Ist außerdem das betrachtete Vektorfeld Killingsch, so folgt leicht der „Erhaltungssatz" (11) für den zugehörigen generalisierten Impulsoperator.

Anmerkungen

1) Formel (4c) zusammen mit $\xi^i \xi_i = -1$ garantiert, daß die zugehörende Bewegungsgruppe eine zeitartige Translation ist. Das heißt, die Stromlinien der Bewegungsgruppe sind zeitartige Geodätische.

2) Bei (9b) handelt es sich um die Liesche Ableitung des geometrischen Objektes ψ_a.

3) Gelten die Einsteinschen Gleichungen (5a), so verliert der Begriff des „allgemeinen" Erhaltungssatzes seine ursprüngliche Bedeutung, da nicht mehr die Gesamtheit aller symmetrischen und divergenzfreien T_{ik} zur Konkurrenz zugelassen sind. „Spezielle", d. h. an die feinere Struktur von T_{ik} gebundene Erhaltungssätze gibt es jedoch beliebig viele: Damit das Funktional (8) von Ω unabhängig ist, ist nämlich nur

$$T_{ik}\, \partial^i \eta^k = 0$$

erforderlich. Diese Bedingung ist ungleich schwächer als (4c).

4) Da nachgewiesen werden kann, das mit unserem Energieausdruck auch die „Gravitationsenergie"

$$-\frac{1}{8\pi\,\gamma}\int (\operatorname{grad}\varphi)^2\, dV$$

der Newtonschen Theorie (als Näheruug 2. Ordnung in φ) erfaßt wird, gibt es auch keinerlei experimentelle Stützen für ein solches Vorgehen.

5) Überdies sind die Größen (8) Zustandsfunktionale der Metrik im Sinne von Dirac.

(Eingegangen: 23. September 1959)