

Als Manuskript gedruckt

Aus dem Theoretisch-Physikalischen Institut, Direktor: Prof. Dr. K. Schuster

# Über Quantentheorien mit indefiniter Metrik

Von

ARMIN UHLMANN

## 1.

Das Auftreten einer indefiniten Metrik für den Hilbert-Raum der möglichen Zustände eines quantalen Systems in der Quantenfeldtheorie wirft das Problem der Verträglichkeit dieses Phänomens mit den üblichen Grundsätzen der Quantentheorie auf.

Um etwas Bestimmtes im Auge zu haben, verstehen wir dabei unter den „üblichen Grundsätzen“ die von P. A. M. Dirac [2] in seinem berühmten Buch „The Principles of Quantum Mechanics“ vorgeschlagenen und allgemein anerkannten Grundsätze der Beschreibung quantaler Systeme.

Die Frage lautet also, ob und wie diese Prinzipien aufrechterhalten werden können, wenn eine Quantentheorie mit indefiniter Metrik vorliegt.

Zur Beantwortung dieser Frage gibt es natürlich verschiedene Wege.

Der eine Weg besteht darin, daß man unter mehr oder weniger vollständiger Ausnutzung der individuellen Züge einer speziellen Theorie mit indefiniter Metrik Hinweise zu erhalten versucht, die dann wenigstens in dieser speziellen und in verwandten Theorien die Lösung des Problems geben. Ein bekanntes Beispiel hierfür sind die Untersuchungen über das Lee-Modell und über andere Modelle. Ein zweiter häufig beschrittener Weg ist die Untersuchung der Streumatrix. Wegen der großen Bedeutung dieser Matrix wäre eine konsequente Theorie der S-Matrix beim Vorliegen indefiniter Metrik von außerordentlicher Bedeutung. Man muß jedoch sagen, daß die oben aufgeworfene Frage von erheblicher größerer Allgemeinheit ist als die Probleme der S-Matrix. Dabei möchte ich weniger die Tatsache betonen, daß die S-Matrix-Theorie nur eine bestimmte Seite einer Quantentheorie im üblichen Sinne ist. Vielmehr will ich hervorheben, daß die S-Matrix im Hinblick auf die Prinzipien der Quantentheorie schon ein begrifflich recht kompliziertes Gebilde ist. Man kann daran zweifeln, ob die mit diesem komplizierten Gebilde zusammenhängenden Fragen zu den Prinzipien der Quantentheorie zu rechnen sind oder ob sie als Folgerungen aus eben diesen Prinzipien sachlich richtiger zu fassen sind.

Ein weiterer Weg zur Lösung der gestellten Aufgabe wurde erstmalig von Ascoli und Minardi [1] beschrieben. Um die Grundidee klarer zu erkennen, wollen wir für einen Moment nur an Quantentheorien mit endlich vielen Freiheitsgraden und mit definiter Metrik denken. Die Erfahrung lehrt dann, daß sämtliche hierunter fallende quantalen Systeme eine gemeinsame „Grobstruktur“ besitzen. Wir

können deshalb von den Prinzipien der Quantentheorien schlechthin sprechen, von gewissen grundsätzlichen Eigenschaften, die allen Systemen dieser Art gemeinsam eigen sind. Diese bei den in Rede stehenden Quantentheorien simultan auftretenden Eigenschaften bezeichnen wir als Axiome und ihre Aufstellung und die Untersuchung ihrer gegenseitigen Bedingtheit als Axiomatik. Die Möglichkeit, Axiomatik zu betreiben ist somit das Resultat vielfältiger Erfahrungen, und diese Möglichkeit ist bekanntlich keineswegs eine besondere Eigenheit der Quantentheorie. Wir wissen vielmehr, daß auch die klassischen Theorien ihre eigene Axiomatik besitzen, soweit sie nicht vollständig auf andere Theorien zurückführbar sind. Dies trifft z. B. auf die Mechanik, die Relativitätstheorie, die phänomenologische Wärmelehre und auf die statistische Mechanik und auf die Elektrodynamik zu. Darüber hinaus wissen wir, daß die axiomatische Methode keineswegs eine Domäne der physikalischen Wissenschaften allein ist.

Die erste Idee, die wir zur Lösung des Problems der indefiniten Metrik benutzen, wird also sein: Wir können annehmen, daß auch Quantentheorien mit indefiniter Metrik eine solche, alle ihre speziellen Fälle verbindende Grundstruktur besitzen, die es ermöglicht, sie axiomatisch zu erfassen. Dies ist der dritte Weg, und wir wollen versuchen, ihn ein kleines Stück zu gehen.

## 2.

Quantentheorien unterscheidet man bekanntlich zunächst ganz grob durch die Zahl der auftretenden Freiheitsgrade. Wir nennen meist Quantenmechanik die Theorie der quantalen Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden, während wir im Begriff Quantenfeldtheorie Theorien zusammenfassen, die unendlich viele Freiheitsgrade besitzen. Während es nun eine völlig ausgearbeitete Axiomatik der Quantenmechanik gibt — man denke nur an Diracs „Prinzipien der Quantenmechanik“ —, kann man von einer systematischen Axiomatik der Quantenfeldtheorien noch nicht sprechen. Erst recht nicht sind wir im Besitz einer Axiomatik der Quantenfeldtheorien mit indefiniter Metrik. Um trotz dieses Sachverhaltes etwas über unser Thema aussagen zu können, brauchen wir eine zweite grundlegende Idee. Auch diese befindet sich bereits — wenigstens implizit — bei Minardi und Ascoli. Bei dieser zweiten Idee geht es darum, welche Erfahrungen der Quantenmechanik in die Quantenfeldtheorie übernommen werden sollen. Denn die quantalen Systeme mit endlich

vielen Freiheitsgraden werden natürlich Eigenschaften besitzen, die auch quantalen Systemen mit beliebig vielen Freiheitsgraden zukommen, wie allgemein anerkannt und durch die Erfahrung bestätigt wird.

Um besagte Idee nun genau formulieren zu können und gleichzeitig die Basis für unsere weiteren Untersuchungen zu legen, muß ich etwas weiter ausholen.

a) Die mathematische Struktur einer jeden Quantentheorie, also auch jeder Quantenfeldtheorie, sieht folgendermaßen aus: Wir haben eine Reihe von Operatoren  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , die die Elemente einer Algebra (eines nicht-kommutativen Ringes)  $\bar{R}$  bilden (bzw. diesen zumindest erzeugen). Die Operatoren  $\alpha, \beta, \dots$  können dabei in beliebiger Zahl vorliegen und auf die eine oder andere Weise zu Scharen zusammengefaßt sein. Zum Beispiel bezeichnen wir als Feldoperatoren Scharen von Operatoren, die durch das Kontinuum der Weltpunkte (oder der Punkte raumartiger Gebiete) parametrisiert werden. Die Frage, wie dies im speziellen Fall geschieht, ist zunächst unwichtig. Wichtig ist nur folgendes: Sind  $\alpha$  und  $\beta$  irgend zwei Operatoren, so ist die Summe  $c\alpha + d\beta$  (mit komplexen Zahlen  $c$  und  $d$ ) und ihr Produkt  $\alpha \cdot \beta$  eindeutig erklärt. Die Algebra  $\bar{R}$  ist dann aus den Operatoren  $\alpha, \beta, \dots$  aufgebaut und ihre Struktur durch die Gesamtheit aller bestehenden Relationen

$$\bar{f}(\alpha, \beta, \dots) = 0 \quad (1)$$

zwischen den Operatoren bestimmt.

b) Innerhalb der Gesamtheit der Operatoren  $R$  ist weiterhin in jeder Quantentheorie eine Operation erklärt, die in der Algebrentheorie als Involution bezeichnet wird und die jedem Operator  $\alpha$  aus  $\bar{R}$  aus einen Operator  $\alpha^*$  zuordnet, der wiederum in  $\bar{R}$  liegt und die folgenden Relationen erfüllt:

$$\begin{aligned} (c\alpha + d\beta)^* &= c^* \alpha^* + d^* \beta^*, \\ (\alpha\beta)^* &= \beta^* \alpha^*, \\ (\alpha^*)^* &= \alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

Wir sprechen von  $\alpha^*$  als von den zu  $\alpha$  konjugierten bzw. hermitisch konjugierten bzw. adjungierten Operator, was die enge Beziehung zur Theorie der Hilbert-Räume zum Ausdruck bringt. Die Operatoren mit  $\alpha = \alpha^*$  heißen deshalb auch hermitisch bzw. selbstadjungiert.

Zu den Punkten a) und b) bemerken wir, daß sie nicht nur in jeder Quantentheorie auftreten, sondern daß darüber hinaus in der Quantenmechanik alles über das quantale System Aussagbare bereits in der Struktur der Algebra  $\bar{R}$  — d. h. in der Gesamtheit der Operatorgleichungen (1) und in der Involution (2) — steckt. In der Quantenmechanik besteht nämlich eine eindeutige Beziehung zwischen den beobachtbaren Größen und den hermitischen Operatoren, und die Algebra  $\bar{R}$  wird durch die hermitischen Operatoren und die zwischen diesen bestehenden Relationen vollständig bestimmt. Für die Quantenfeldtheorie können wir jedoch lediglich die schwächere Aussage machen, daß die den beob-

achtbaren Größen zugeordneten Operatoren unter den hermitischen zu finden sind. Die Umkehrung, daß jedem hermitischen Operator — wenigstens im Prinzip — eine beobachtbare Größe entspricht, wollen wir dahingestellt sein lassen. Wir nennen *physikalischen Operator* jeden Operator aus  $\bar{R}$ , dem eine beobachtbare Größe entspricht. Diese Bezeichnung ist nicht sehr glücklich gewählt; denn nach ihr müßte man meinen, daß jeder andere Operator als nicht-physikalisch zu bezeichnen ist. Zum Beispiel müßte man konsequenterweise dann einen spinorellen Feldoperator als „unphysikalisch“ bezeichnen, was offenbar unsinnig ist. Wir dürfen also in diesem Fall den Ausdruck „physikalisch“ nicht als Gegensatz zu unphysikalisch ansehen, sondern eben nur als eine Bezeichnung, die Observable kennzeichnet. Wir nehmen also als nächsten Gesichtspunkt den Tatbestand auf:

c) Jeder physikalische Operator ist hermitisch. Gleichzeitig meßbaren Größen entsprechen kommutierende physikalische Operatoren.

Die physikalischen Operatoren bestimmen eine Unter algebra von  $\bar{R}$ , die wir mit  $R$  bezeichnen wollen.  $R$  ist also die Gesamtheit aller der Operatoren, die sich mit Hilfe der physikalischen Operatoren ausdrücken lassen. Man kann auch sagen,  $R$  ist die von den physikalischen Operatoren erzeugte Algebra oder schließlich,  $R$  ist die kleinste Unter algebra von  $\bar{R}$ , die sämtliche physikalischen Operatoren enthält. Im allgemeinen wird

$$R \subseteq \bar{R}, \text{ aber } R \neq \bar{R} \quad (3)$$

sein.

Zur Beschreibung eines quantalen Systems benötigen wir nun nicht nur die Operatoren  $\bar{R}$  bzw.  $R$ , sondern auch den Hilbert-Raum  $Z$  der möglichen Zustände des quantalen Systems. Die zweite grundlegende Idee von Minardi und Ascoli besteht nun in der folgenden Annahme:

d) Zum Vergleich der Theorie mit dem Experiment ist es nur nötig, die Wirkung der physikalischen Operatoren auf den Raum der Zustände zu kennen. Ist also  $|A\rangle$  ein Zustandsvektor, so langt es  $\alpha|A\rangle$  für den Fall zu kennen, daß  $\alpha$  ein physikalischer Operator ist.

Üblicherweise geht man bei der Konstruktion von  $Z$  von der Gesamtheit der Operatoren  $\bar{R}$  aus. Aber Ascoli und Minardi finden, daß wir hiermit etwas zu viel verlangen und daß das Auftreten der indefiniten Metrik mit einer Art Überforderung des Raumes der Zustandsamplituden zusammenhängen mag. Tatsächlich sind die von diesen beiden Autoren gemachten Voraussetzungen scharf genug, um folgendes zu beweisen: Der Gesamttraum der Zustandsvektoren läßt sich zerlegen in eine Summe

$$Z = Z_{ph} + Z_0, \quad (4)$$

wobei  $Z_{ph}$  die physikalischen Zustände beschreibt, während  $Z_0$  die „Geisterzustände“ andeuten soll. Die Beschränkung der Metrik auf  $Z_{ph}$  ist positiv semi-definit, und die physikalischen Operatoren führen Elemente aus  $Z_{ph}$  in wieder solche über.

Durch eine formal recht einfache Operation kann man die Vektoren mit verschwindender Norm aus einem semi-definiten Hilbert-Raum entfernen. Wir erhalten dadurch einen Hilbert-Raum  $Z'_{ph}$ , der positiv definit und gleichzeitig eine Darstellung der physikalischen Operatoren ist. Wenn wir diesen Hilbert-Raum als den Raum der physikalisch möglichen Zustände ansehen und uns nur auf die physikalischen Operatoren konzentrieren, dann haben wir also den schon aus der Quantenmechanik wohl-bekanntem Tatbestand vor uns.

Nun ist es aber höchst merkwürdig, daß durch die indefinite Metrik keinerlei qualitativ neue Züge in der Quantentheorie auftreten sollten. Es liegt deshalb die Annahme nahe, daß die von Minardi und Ascoli benutzten Voraussetzungen zu scharf sind oder daß vielleicht irgendein möglicher Ausnahmefall bei der Diskussion übersehen wurde.

### 3.

Wegen unserer Annahme d), die fordert, daß lediglich die Wirkung der physikalischen Operatoren auf die physikalisch möglichen Zustände bekannt zu sein braucht, können wir uns von vornherein auf die physikalischen Operatoren und die von ihnen erzeugte Algebra  $R$  konzentrieren. Wir nehmen also an, daß der Raum der Zustände  $Z$  sei eine Darstellung von  $R$ . Das heißt, ist  $\alpha$  aus  $R$  und  $|A\rangle$  aus  $Z$ , so ist  $\alpha|A\rangle$  erklärt, und es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha(|A\rangle + |B\rangle) &= \alpha|A\rangle + \alpha|B\rangle, \\ (\alpha + \beta)|A\rangle &= \alpha|A\rangle + \beta|A\rangle, \\ (\alpha\beta)|A\rangle &= \alpha(\beta|A\rangle), \\ \langle A|\alpha|B\rangle^* &= \langle B|\alpha^*|A\rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Wir vermerken, daß von diesem Standpunkt aus die Frage, was  $\beta|A\rangle$  für einen beliebigen Operator  $\beta$  aus  $\bar{R}$  ist, der nicht in  $R$  liegt, sinnlos ist, wenn man nicht noch neue zusätzliche Annahmen macht.

Wir betrachten zunächst das Paar  $R, Z$  näher. Wir können von vornherein noch zusätzlich annehmen, daß  $Z$  eine irreduzible Darstellung von  $R$  ist, d. h., es gibt keinen echten Unterraum  $Z'$  von  $Z$ , der bereits eine Darstellung von  $R$  ist. Mit anderen Worten: Ist  $Z'$  von  $Z$  und Null verschieden, so gibt es einen Operator  $\alpha$  aus  $R$  und einen Vektor  $|A\rangle$  aus  $Z'$  mit  $\alpha|A\rangle \notin Z'$ . Ist diese Annahme nicht erfüllt, so gibt es Verfahren, den Hilbert-Raum  $Z$  so abzuändern, daß die gemachte Voraussetzung gilt [4].

Nach Ascoli und Minardi müßte nun  $Z$  von selbst positiv definit sein, und diese Behauptung wollen wir im weiteren prüfen.

Die erste Folgerung, die wir ziehen können, ist: Die Metrik von  $Z$  ist nicht ausgeartet. Das heißt, ist  $|A\rangle$  irgendein Vektor aus  $Z$ , so gibt es einen zweiten Vektor  $|B\rangle$  mit der Eigenschaft  $\langle A|B\rangle \neq 0$ . Man kann nämlich beweisen, daß die Menge aller Vektoren  $|A\rangle$ , für die  $\langle B|A\rangle = 0$  für alle  $|B\rangle$  aus  $Z$  ist, nur aus der Null bestehen kann. Im entgegengesetzten Fall wäre  $Z$  nämlich nicht irreduzibel.

### 4.

Wir müssen uns jetzt mit den Beziehungen des Paares  $R, Z$  zum Ausgang möglicher Experimente beschäftigen. Dazu erklären wir zunächst den Be-

griff des „vollständigen Satzes“. Unter einem vollständigen Satz wollen wir ein System  $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$  kommutierender physikalischer Operatoren verstehen, das folgende Eigenschaften besitzt: Sind  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  irgendwelche reelle Zahlen, so gibt es höchstens einen physikalischen Zustand, der bei simultaner Bestimmung der den Operatoren aus  $S$  zugeordneten beobachtbaren Größen gerade die Werte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  liefert. Wir wollen diesen physikalischen Zustand mit  $S(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  bezeichnen, falls er überhaupt existiert. Diese Bezeichnung erscheint sinnvoll, da der in Rede stehende Zustand vollkommen durch Angabe der Operatoren von  $S$  und der Meßwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  bestimmt ist. Die Frage, ob jeder in der Natur realisierte Zustand auf diese Weise charakterisiert werden kann, lassen wir zunächst dahingestellt.

Die nächste grundlegende Annahme, die wir machen, ist die:

e) Ist  $S$  ein vollständiger Satz und  $S(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  ein physikalischer Zustand, so gibt es bis auf einen konstanten Faktor genau einen Vektor  $|A\rangle$  in  $Z$  mit

$$\alpha_k|A\rangle = \lambda_k|A\rangle, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Dies ist eine sehr schwache Voraussetzung. Sie besagt tatsächlich nicht mehr als: Es gibt physikalische Zustände, die durch ein System gleichzeitig ausführbarer Beobachtungen eindeutig charakterisiert werden können. Es wird nicht verlangt, daß dies für alle physikalischen Zustände der Fall ist.

Wir ziehen nun eine erste Folgerung. Der Einfachheit wegen nennen wir  $S$ -Eigenvektor jeden Vektor aus  $Z$  mit der Eigenschaft (6) und setzen das Wort „physikalisch“ hinzu, wenn dieser Vektor zu einem physikalischen Zustand gehört.

*Satz 1:* Ist  $|A\rangle$  ein physikalischer  $S$ -Eigenvektor des vollständigen Satzes  $S$ , so ist  $\langle A|A\rangle \neq 0$ . Ist  $|B\rangle$  irgendein anderer  $S$ -Eigenvektor (nicht notwendig physikalisch), so gilt entweder  $|B\rangle = c|A\rangle$  mit komplexen  $c$  oder es ist  $\langle A|B\rangle = 0$ .

Ist nämlich  $|B\rangle \neq c|A\rangle$ , so gibt es nach Voraussetzung e) einen Operator  $\alpha$  von  $S$  mit

$$\alpha|A\rangle = \lambda|A\rangle, \quad \alpha|B\rangle = \mu|B\rangle, \quad \lambda \neq \mu$$

und reellem  $\lambda$ . Aus  $\langle A|\alpha|B\rangle = \langle B|\alpha|A\rangle^*$  folgt dann  $(\mu - \lambda)\langle A|B\rangle = 0$  und somit  $\langle A|B\rangle = 0$ . Nun machen wir davon Gebrauch, daß jeder Vektor  $|C\rangle$  aus  $Z$  eine Entwicklung

$$|C\rangle = \alpha|A\rangle + \sum |B_k\rangle$$

nach  $S$ -Eigenvektoren besitzt. Dies entspricht der Forderung nach Diagonalisierbarkeit. Es folgt  $\langle A|C\rangle = \alpha \cdot \langle A|A\rangle$ . Wäre  $\langle A|A\rangle = 0$ , so wäre deshalb die Metrik von  $Z$  entartet. Aber dies widerspricht unseren Voraussetzungen über  $Z$ .

Wir bezeichnen nun mit  $Z(S)$  den von allen physikalischen  $S$ -Eigenvektoren aufgespannten Teilraum von  $Z$  und mit  $Z_0(S)$  das orthogonale Komplement von  $Z(S)$ .

Aus dem eben Bewiesenen können wir folgern, daß  $Z_0(S)$  von den nicht-physikalischen  $S$ -Eigenvektoren aufgespannt wird und daß deshalb

$$Z = Z(S) + Z_0(S), \quad Z(S) \cap Z_0(S) = 0 \quad (7)$$

gilt. Da nun  $Z(S)$  zu  $Z_0(S)$  orthogonal ist und (7) gilt, kann die Beschränkung der Metrik auf  $Z(S)$  nicht ausgeartet sein; denn sonst wäre dies auch für  $Z$  zutreffend. Aus dem gleichen Grund ist auch die Metrik von  $Z_0(S)$  nicht ausgeartet.

Zu jedem vollständigen Satz gehört also eine Zerlegung (7) des Gesamttraumes  $Z$ . Das Superpositionsprinzip, dessen uneingeschränkte Gültigkeit wir annehmen, gibt uns eine Aussage über  $Z(S)$ .

Da die Diagonalisierbarkeit nicht immer gewährleistet ist, kann man als Abschwächung die Gültigkeit von (7) fordern.

f) Ist  $S$  ein vollständiger Satz, so entspricht jedem von Null verschiedenen Vektor aus  $Z(S)$  genau ein physikalischer Zustand.

Umgekehrt ist jedem physikalischen Zustand bis auf einen konstanten Faktor genau ein Vektor aus  $Z(S)$  zugeordnet.

Bei f) handelt es sich, kurz gesagt, darum, daß jeder physikalische Zustand eine Überlagerung von physikalischen  $S$ -Eigenvektoren beschrieben werden kann, wobei  $S$  irgendein vollständiger Satz ist.

Wenn nun für zwei beliebige vollständige Sätze  $S_1$  und  $S_2$  stets  $Z(S_1) = Z(S_2)$  gilt, so gilt auch stets  $Z_0(S_1) = Z_0(S_2)$ , und die Zerlegung (7) ist von der Wahl des vollständigen Satzes  $S$  unabhängig. Dann aber kann  $Z_0 = Z_0(S)$  nur aus der Null bestehen, weil sonst  $Z$  nicht irreduzibel wäre. Bedeutend schwieriger wird das Problem, wenn es vollständige Sätze  $S_1$  und  $S_2$  mit  $Z(S_1) \neq Z(S_2)$  gibt. Es müssen dann die zu  $Z(S_1)$  gehörenden Vektoren eindeutig den Vektoren aus  $Z(S_2)$  zugeordnet sein und umgekehrt. Der einfachste Weg, der, wenn man ohne zusätzliche Annahmen auskommen will, auch der einzige ist, geht über die Projektoren.

Wir bezeichnen mit  $P(S)$  denjenigen Projektionsoperator, der  $Z$  auf  $Z(S)$  abbildet. Es ist also

$$\begin{aligned} P(S)|A\rangle &= |A\rangle, \quad \text{wenn } |A\rangle \in Z(S), \\ P(S)|A\rangle &= 0, \quad \text{wenn } |A\rangle \in Z_0(S) \end{aligned} \quad (8)$$

ist.

Die eben eingeführten Projektoren müssen gewissen Bedingungen genügen, wenn die Forderung f) überhaupt erfüllbar sein soll. Das heißt, es gibt einige Forderungen, die als Konsistenzbedingungen wirken. Ihr Erfülltsein ist mit der Annahme f) gleichbedeutend. Die erste dieser Bedingungen ist sehr einfach: Sind  $S_1$  und  $S_2$  zwei vollständige Sätze, so muß  $P(S_2)$  den Raum  $Z(S_1)$  auf den Raum  $Z(S_2)$  projizieren:

$$P(S_2) \cdot Z(S_1) = Z(S_2). \quad (9)$$

Wäre (9) nicht erfüllt, so gäbe es physikalische Zustände, die zwar durch  $Z(S_1)$ , nicht aber durch  $Z(S_2)$  beschrieben werden können. Das verstößt gegen die Forderung f).

Nehmen wir nun einen Vektor  $|A_1\rangle$  aus  $Z(S_1)$ . Seine Projektion in  $Z(S_2)$  sei  $|A_2\rangle$ . Wird dieser Vektor nun wieder nach  $Z(S_1)$  projiziert, so muß der entstehende Vektor  $|B_1\rangle$  denselben Zustand wie  $|A_1\rangle$  beschreiben. Es sollte sich also  $|B_1\rangle$  nur durch einen konstanten Faktor von  $|A_1\rangle$  unterscheiden. Diesen Tatbestand kann man durch die Formel

$$P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_1) = c_{12} \cdot P(S_1) \quad (10)$$

ausdrücken. Analoge Betrachtungen für drei vollständige Sätze führen auf die Formel

$$P(S_3) \cdot P(S_1) = c_{122} P(S_3) \cdot P(S_2) \cdot P(S_1), \quad (11)$$

die (10) wegen  $P^2 = P$  als Spezialfall enthält. Übrigens ist (9) wiederum eine Konsequenz von (10), so daß die angekündigte Konsistenzbedingung die Formel (11) ist\*). Eine Quantentheorie, die (11) nicht erfüllt, ist im Rahmen der hier betrachteten Annahmen inkonsistent. Sei  $|1\rangle$  ein Vektor aus  $Z(S_1)$  und sei  $|2\rangle = P(S_2) \cdot |1\rangle$ . Dann folgt aus Formel (10)

$$\begin{aligned} \langle 2|2\rangle &= \langle 1|P(S_2)|1\rangle = \langle 1|P(S_1)P(S_1)|1\rangle \\ &= c_{12} \langle 1|P(S_1)|1\rangle = c_{12} \langle 1|1\rangle \end{aligned} \quad (12)$$

und die Abbildung (9) ist bis auf einen Faktor isometrisch (unitär). Deshalb kann folgendes festgestellt werden:

Entsprechend den Vektoren  $|A_1\rangle$  und  $|B_1\rangle$  aus  $Z(S_1)$  die Vektoren  $|A_2\rangle$  und  $|B_2\rangle$  aus  $Z(S_2)$ , so ist

$$\begin{aligned} \frac{\langle A_1|B_1\rangle \langle B_1|A_1\rangle}{\langle A_1|A_1\rangle \langle B_1|B_1\rangle} &= \\ &= \frac{\langle A_2|B_2\rangle \langle B_2|A_2\rangle}{\langle A_2|A_2\rangle \langle B_2|B_2\rangle}. \end{aligned} \quad (13)$$

Bemerken wir schließlich: Entweder die Metrik auf  $Z(S)$  ist für alle vollständigen Sätze definit oder aber für keinen einzigen.

## 5.

Die Tatsache, daß die metrischen Verhältnisse wegen (12) und (13) beim Übergang zwischen den verschiedenen  $Z(S)$  im wesentlichen erhalten bleiben, eröffnet die Aussicht, die unphysikalischen Zustände  $Z_0(S)$  aus der Theorie zu entfernen. Hierzu ist natürlich die Erfüllung der Konsistenzbedingung notwendig.

Allgemein kann man sagen, daß dies nur möglich ist, wenn man die Relationen, die zwischen den physikalischen Operatoren bestehen, verändert; denn da wir  $Z$  als irreduzibel vorausgesetzt haben, sind alle anderen Möglichkeiten erschöpft. Dieser Prozeß wird so verlaufen, daß jedem physikalischen Operator  $\alpha$  ein neuer Operator  $\alpha'$  zugeordnet wird. Es wird dann der Operator  $\alpha'$  als physikalischer Operator angesehen. Ihm entspricht genau die beobachtbare Größe, die ursprünglich zu  $\alpha$  gehörte. Die Gesamtheit dieser „neuen“ physikalischen Operatoren genügt dann natürlich anderen Relationen.

Zur Beschreibung des Vorganges wählen wir irgendeinen vollständigen Satz  $S$  aus und bilden  $Z(S)$ . Sei nun  $\alpha$  irgendein physikalischer Operator. Wir wählen dann einen vollständigen Satz  $S_1$ , zu dem der Operator  $\alpha$  gehört. Wegen Relation (10) gibt es dann genau einen auf  $Z(S)$  erklärten Operator  $\alpha'$  mit

$$P(S_1)\alpha' = \alpha P(S_1) \quad (14)$$

für die Vektoren aus  $Z(S)$ .

Damit die Bedingung (14) sinnvoll ist, muß die Definition von  $\alpha'$  unabhängig von der Wahl des

\*) Wir nehmen  $c_{123}$  als Konstante an. Mit allen Bedingungen wäre auch verträglich, daß  $c_{123}$  ein lineares Funktional auf  $Z$  ist.

vollständigen Satzes S 1 sein. Tatsächlich garantiert die Bedingung (11), daß durch (14) immer der gleiche Operator  $\alpha'$  erhalten wird, wie immer der vollständige Satz S 1 unter der Nebenbedingung, daß  $\alpha$  zu S 1 gehört, gewählt wurde. Für den Beweis siehe [4]. Da weiter P(S 1) bis auf einen konstanten Faktor eine unitäre Abbildung von  $Z(S)$  auf  $Z(S 1)$  ist, ist  $\alpha'$  ein hermitescher Operator auf  $Z(S)$ .

Nachdem wir nun die neuen Operatoren als die physikalischen ansehen und den Raum  $Z(S)$  als den Raum der möglichen Zustände, auf den diese Operatoren wirken, haben wir unser Ziel erreicht: Ist  $R'$  eine von den neuen physikalischen Operatoren erzeugte Algebra und  $Z' = Z(S)$  der Hilbert-Raum der Zustände, so liegt nach Konstruktion tatsächlich eine Theorie ohne unphysikalische Zustände vor. Man kann nachweisen, daß die Konstruktion von der Wahl des vollständigen Satzes S unabhängig ist. Eine Abänderung von S ist einer unitären Transformation gleichbedeutend [4]. Der eben beschriebene Prozeß ist also im wesentlichen eindeutig.

Wir bemerken, daß die  $\alpha'$  gerade die Eigenwerte besitzen, die zu den  $\alpha$  für *physikalische* Zustände gehören. Weiter gehen bei der Konstruktion vollständige Sätze wieder in vollständige Sätze über. Endlich bleiben alle Relationen, die zwischen *kommutierenden* Operatoren bestehen, erhalten. Mit Notwendigkeit ändern sich aber einige Beziehungen zwischen nichtvertauschbaren Operatoren.

## 6.

Wegen des eben beschriebenen Verfahrens können wir für die folgenden Untersuchungen annehmen, daß schon alle unphysikalischen Zustände aus der Theorie entfernt sind. Wir nehmen also für das Paar  $R, Z$  an, daß die physikalischen S-Eigenvektoren eines jeden vollständigen Satzes bereits ganz  $Z$  aufspannen. Was wir immer noch nicht wissen, ist, ob dann  $Z$  mit Notwendigkeit eine definite Metrik tragen muß, damit die Theorie konsistent ist.

Wir nennen einen Vektor aus  $Z$  *eigentlich*, wenn er S-Eigenvektor eines gewissen vollständigen Satzes ist. Im anderen Falle heiße er *uneigentlich*.

Diese Definition teilt die physikalischen Zustände in zwei Klassen: Um einen physikalischen Zustand als uneigentlich einzuordnen, müssen wir wissen, daß jeder vollständige Satz (mindestens) einen Operator enthält, dessen zugeordnete Observable beim Vorliegen dieses Zustandes keinen scharfen Wert annimmt. Das Gegenteil tritt ein, wenn ein eigentlicher Zustand vorliegt. Dann gibt es mindestens einen vollständigen Satz, dessen Messung den Zustand vollständig charakterisiert. Dieser Unterschied ist zumindest im Prinzip beobachtbar.

**Satz 2:** Genau dann besitzt  $Z$  definite Metrik, wenn durch  $Z$  nur eigentliche Zustände beschrieben werden.

Dieser Satz enthält u. a. das Resultat von Ascoli und Minardi [1].

Der Beweis ist sehr einfach. Nehmen wir an,  $Z$  enthalte nur eigentliche physikalische Zustände. Dann ist nach Satz 1 die Norm jedes von Null verschiedenen Vektors von Null verschieden. Dies kann aber nur

bei definitiver Metrik sein. Andererseits beschreibt eine Quantentheorie mit positiv-definitiver Metrik ohne unphysikalische Zustände nur eigentliche physikalische Zustände.

Das Ergebnis ist also, daß die indefinite Metrik — soweit sie sich nicht durch die bereits besprochenen Prozesse eliminieren läßt — uneigentliche Zustände zu beschreiben gestattet. Wegen Satz 2 kann man sagen: Beschreibt eine Theorie auch uneigentliche physikalische Zustände, dann ist es in keiner Weise möglich, die indefinite Metrik aus der Theorie zu eliminieren.

Nehmen wir also an, daß die durch das Paar  $R, Z$  charakterisierte Quantentheorie auch uneigentliche Zustände beschreibt und deshalb  $Z$  indefinite Metrik trägt. Ist S ein vollständiger Satz, so läßt sich jeder Vektor  $|A\rangle$  nach physikalischen S-Eigenvektoren  $|A_k\rangle$  entwickeln

$$|A\rangle = \sum c_k |A_k\rangle, \quad (15a)$$

wobei wegen Satz 1 die Normierung

$$\langle A_k | A_k \rangle = \pm 1 \quad (15b)$$

angenommen werden kann. Wir werden dann die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung S des Zustandes  $|A\rangle$  den Zustand  $|A_k\rangle$  zu finden, proportional  $|c_k|^2$  annehmen dürfen. Aus Normierungsgründen ist deshalb

$$W_{A \rightarrow A_k} = \frac{|c_k|^2}{\sum_j |c_j|^2} \quad (16)$$

Wir können dieser Formel eine kompaktere Form geben. Dazu definieren wir den Operator  $\varepsilon = \varepsilon(S)$  durch

$$\begin{aligned} \varepsilon |A_k\rangle &= |A_k\rangle \quad \text{für} \quad \langle A_k | A_k \rangle = 1 \\ \varepsilon |A_k\rangle &= -|A_k\rangle \quad \text{für} \quad \langle A_k | A_k \rangle = -1. \end{aligned} \quad (17)$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} \langle A | B \rangle_s &= \langle A | \frac{1 + \varepsilon}{2} | B \rangle \\ - \langle A | \frac{1 - \varepsilon}{2} | B \rangle &= \langle A | \varepsilon(S) | B \rangle \end{aligned} \quad (18)$$

eine positiv definite Metrik in  $Z$ , die allerdings von der Wahl des vollständigen Satzes S abhängt [3]. Dann kann man leicht nachrechnen, daß die in Formel (15) definierte Übergangswahrscheinlichkeit durch

$$W_{A \rightarrow A_k} = \frac{|\langle A | A_k \rangle_s|^2}{\langle A | A \rangle_s} \quad (15c)$$

gegeben ist. Man wird also *definieren*: Ist  $|A\rangle$  ein beliebiger Zustand und  $|B\rangle$  ein S-Eigenvektor ( $|B\rangle$  repräsentiert also einen eigentlichen Zustand!), so ist

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{|\langle A | B \rangle_s|^2}{\langle A | A \rangle_s \langle B | B \rangle_s}. \quad (19)$$

Diese Definition folgt offenbar eindeutig aus der Forderung nach wahrscheinlichkeitstheoretischer Deutung. Sie bringt aber zwei höchst bemerkenswerte Konsequenzen mit sich.

Betrachten wir nämlich zwei eigentliche Zustände und die zugehörigen Vektoren  $|A\rangle$  und  $|B\rangle$ .

Nehmen wir an, daß  $|A\rangle$  ein  $S_1$ -Eigenvektor,  $|B\rangle$  ein  $S_2$ -Eigenvektor ist, und betrachten wir den Fall  $\varepsilon(S_1) \neq \varepsilon(S_2)$ . Man kann sich dann überlegen, daß in der Definition der Übergangswahrscheinlichkeit eine Asymmetrie steckt, die die Richtung des Übergangs ausgezeichnet: Man wird also Fälle mit

$$\frac{|\langle A|B\rangle_{S_1}|^2}{\langle A|A\rangle_{S_1}\langle B|B\rangle_{S_1}} \neq \frac{|\langle A|B\rangle_{S_2}|^2}{\langle A|A\rangle_{S_2}\langle B|B\rangle_{S_2}}$$

nicht ausschließen können. Das heißt aber, daß bei geeigneter Wahl der Zustände  $|A\rangle$  und  $|B\rangle$

$$W_{A \rightarrow B} \neq W_{B \rightarrow A} \quad (20)$$

sein wird. Die indefinite Metrik führt also zu einer Störung der Symmetrie der Übergangswahrscheinlichkeit. Es fragt sich, ob diese Asymmetrie als Ausdruck einer Irreversibilität gedeutet werden kann.

Zur Definition der Übergangswahrscheinlichkeit möchte ich noch bemerken:  $W_{A \rightarrow B}$  ist nicht für beliebige Zustände  $|B\rangle$  erklärt.  $|B\rangle$  muß als eigentlicher Zustand vorausgesetzt sein. Tatsächlich wäre auch die Wahrscheinlichkeit des Überganges eines Zustandes in einen uneigentlichen kein direkt beobachtbares Ereignis; denn es gibt ja nach Definition kein Experiment, das einen solchen Zustand mit Notwendigkeit produziert. Sonst wäre ja dieser Zustand nach Definition eigentlich.

Kehren wir nochmals zu Formel (15) zurück und betrachten einen Operator  $\alpha$ , der zu  $S$  gehört. Ist dann

$$\alpha|A_k\rangle = \lambda|A_k\rangle, \quad (21 a)$$

so werden wir als Erwartungswert  $\bar{\alpha}$  von  $\alpha$  nur

$$\bar{\alpha} = \frac{\sum \lambda_k |c_k|^2}{\sum |c_k|^2} \quad (21 b)$$

definieren können. Es folgt hieraus leicht

$$\bar{\alpha}(S) = \frac{\langle A|\alpha|A\rangle_S}{\langle A|A\rangle_S}, \quad \alpha \in S. \quad (22)$$

Bemerkenswerterweise können wir den Fall

$$\bar{\alpha}(S_1) \neq \bar{\alpha}(S_2) \quad (23 a)$$

nicht völlig ausschließen, der vorliegen könnte, wenn

$$\alpha \in S_1, \alpha \in S_2, \varepsilon(S_1) \neq \varepsilon(S_2) \quad (23 b)$$

ist. Wir sehen, da die Eigenwerte von  $\alpha$  von der Wahl des vollständigen Satzes unabhängig sind, daß die Anordnung zur Beobachtung der Größe  $\alpha$  Einfluß auf die statistische Verteilung der ermittelten Werte haben kann.

#### Literatur

- [1] Ascoli, R., u. Minardi, E., Nuclear Physics 9, 242 (1958/59).
- [2] Dirac, P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics. Cambridge 1957.
- [3] Uhlmann, A., Nuclear Physics 9, 588 (1958/59).
- [4] — Nuclear Physics 12, 103 (1958).

Eingegangen: 6. Juni 1959)