

Als Manuskript gedruckt

Aus dem Theoretisch-Physikalischen Institut, Direktor: Prof. Dr. K. Schuster

Das Rechnen mit alternierenden Differentialformen

Von

ARMIN UHLMANN

Das Rechnen mit alternierenden Differentialformen

Der folgende Vortrag ist ein kurzer informierender Bericht über einige Probleme des Rechnens mit alternierenden Differentialen. Der Kalkül der alternierenden Differentialformen wurde von E. Cartan, auf Ideen von Graßmann und Poincaré fußend, aufgebaut und erfolgreich auf verschiedene Probleme der Geometrie, der Theorie der Lieschen Gruppen und auf viele andere Gebiete der Mathematik angewendet. Seitdem spielt dieser Kalkül eine immer größere Rolle in vielen Zweigen der Mathematik. Als Beispiele seien genannt:

Integration (mehrfache Integrale),
 Systeme von Differentialgleichungen,
 Potentialtheorie auf Riemannschen Räumen,
 Lie-Gruppen,
 System-Mechanik,
 mehrdimensionale Variationsprobleme.

Leider ist dieser äußerst sinnreiche und elegante Kalkül unter den Physikern noch recht unbekannt, obwohl vielerlei Anwendungen fast auf der Hand liegen. Der Sinn dieses Vortrages ist es deshalb, das Interesse für die alternierenden — oder auch äußeren — Differentialformen zu wecken. Außerdem soll der Vortrag eine Art mathematische Vorbereitung auf den folgenden Vortrag von Herrn Prof. Heber sein, in dem dieser Kalkül benutzt wird.

1.

Weite Verbreitung auch bei den theoretischen Physikern haben bisher Elemente des absoluten Differentialkalküls gefunden und jeder rechnet mit absoluten Differentialformen wie z. B. mit

$$ds^2 = \sum g_{ik} dx^i \cdot dx^k.$$

Es ist klar, daß dem die Relationen

$$dx^i \cdot dx^k = dx^k \cdot dx^i$$

zugrunde liegen. Diese Relationen verstehen sich natürlich nicht von selbst; denn zunächst ist zwischen den Differential dx^i und dx^k überhaupt kein Produkt erklärt. Genauer gesagt, das allgemeinst mögliche Produkt zwischen solchen Differentialen ist so beschaffen, daß $dx^i dx^k$ etwas ganz anderes als $dx^k dx^i$ im Sinne der nicht-kommutativen Algebra ist. Die Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke ist also nur eine Definition, eine Festlegung, die allerdings durch die Natur der Sache sehr nahegelegt wird.

Eine andere, fast ebenso einfache Festlegung ist offenbar

$$dx^i dx^k + dx^k dx^i = 0 \quad (1)$$

und tatsächlich ist diese der Ausgangspunkt des Cartanschen Differentialkalküls. Zur Unterscheidung vom absoluten Differentialkalkül schreiben wir als Multiplikationszeichen jedoch keinen Punkt, sondern ein „Dach“, so daß Formel (1) besser

$$dx^i \wedge dx^k + dx^k \wedge dx^i = 0 \quad (1)$$

zu schreiben ist.

Die zunächst sehr formale Einführung der sogenannten äußeren oder alternierenden Multiplikation (1) hat natürlich einen gewichtigen inhaltlichen Hintergrund: Betrachten wir z. B. ein mehrfaches Integral

$$\int f(x^1) dx^1 dx^2 \dots dx^n \quad (2a)$$

Wenn wir dieses auf andere Variablen umtransformieren, so haben wir bekanntlich

$$\int f \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} dy^1 \dots dy^n \quad (2b)$$

zu bilden. Setzen wir im Sinne der invarianten Integration — d. h. der *Integration über Invarianten* — die beiden Integranden gleich

$$f dx^1 \dots dx^n = f \frac{\partial(x^1 \dots x^n)}{\partial(y^1 \dots y^n)} dy^1 \dots dy^n, \quad (2c)$$

so ist — wegen der Eigenschaft der Funktionaldeterminante — der Ausdruck (2c) offenbar nur dann gegenüber irgendwelchen Vertauschungen der Variablen x^i oder y^k invariant, wenn die Differentiale alternierend multipliziert sind. Damit (2c) sinnvoll ist, muß also (als eine Bedingung) die Multiplikation nach der Regel (1) erfolgen. Deshalb schreiben wir das Integral genauer

$$\int f dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (2d)$$

Nach diesen einleitenden Bemerkungen wird wahrscheinlich schon klar, daß der alternierende Differentialkalkül kein Konkurrenz-Unternehmen gegen den absoluten Differentialkalkül ist. Vielmehr ergänzen sich beide auf glückliche Weise und sind beide gleichermaßen unentbehrlich.

2.

Den Ausgangspunkt für einen etwas systematischeren Aufbau des Kalküls bilden die Pfaffschen Formen, deren Theorie wir hier nicht darlegen, sondern in ihren Anfangsgründen voraussetzen. Die Differentialformen 1. Grades — wie wir die Pfaffschen Formen gelegentlich nennen — sind ja bereits in vielen Zweigen der Physik heimisch geworden, wie etwa ein Blick auf die Pfaffschen Formen

$$\sum p_i dq_i - H \cdot dt \quad \text{oder} \quad T^{-1}(dU + p dV)$$

zeigt.

Kurz gesagt ist jeder Ausdruck

$$\vartheta = g_1 \cdot df_1 + \dots + g_s \cdot df_s$$

mit gewissen Funktionen g_i und f_k eine Pfaffsche Form und alle Relationen zwischen solchen Ausdrücken sind Folgerelationen der Beziehungen

$$dh - \sum_k \frac{\partial h}{\partial h_k} dh_k = 0,$$

wobei h eine beliebige Funktion der h_k ist.

Als alternierendes Differential bezeichnen wir nun jeden Ausdruck der Form

$$\Theta = f + \vartheta + \vartheta_1 \wedge \vartheta_2 + \vartheta_3 \wedge \vartheta_4 + \dots + \vartheta'_1 \wedge \vartheta'_2 \wedge \vartheta'_3 + \dots \vartheta_1^* \wedge \vartheta_2^* \wedge \dots \wedge \vartheta_1^* \quad (3a)$$

($\vartheta, \vartheta_k, \vartheta_1^* \dots$ sind Pfaffsche Formen).

Ist x^i ein Koordinatensystem, so können wir ihn wegen der Relationen $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ auch auf die Gestalt

$$\Theta = f + \sum A_i dx^i + \sum A_{ik} dx^i \wedge dx^k + \sum A_{ikl} dx^i \wedge dx^k \wedge dx^l + \dots \quad (3b)$$

bringen. Wegen der Regeln (1) können wir dann diesen Ausdruck wie folgt „normieren“:

Entweder wir verlangen, daß die Koeffizienten A_{i_1, i_2, \dots, i_r} schiefsymmetrisch in den Indizes sind. Dann bilden die Zuordnungen

$$\{x^1, \dots, x^n\} \rightarrow A_{i_1, \dots, i_r} \quad (3c)$$

offenbar schiefsymmetrische Tensoren, weshalb sich hinter den äußeren Differentialen die schiefsymmetrischen kovarianten Tensoren gewissermaßen „verbergen“.

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, die Summation geeignet einzuschränken. Offenbar kann wieder wegen (1) Θ auch in die Gestalt

$$\Theta = f + \sum A_i dx^i + \sum_{i < k} A'_{ik} dx^i \wedge dx^k + \sum_{i < k < l} A'_{ikl} dx^i \wedge dx^k \wedge dx^l + \dots \quad (3d)$$

gebracht werden.

Als Beispiel betrachten wir das Differential

$$\Theta = B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 + c(E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3) \wedge dt = \frac{1}{2} \sum F_{ik} dx^i \wedge dx^k, \quad (x^4 = ct), \quad (4)$$

wobei der schiefsymmetrische Tensor F_{ik} der von Minkowski eingeführte relativistische Feldstärke-Tensor ist.

Vom Differential (4) sagen wir, es sei vom zweiten Grade. Allgemein nennen wir äußeres Differential vom Grade r — oder kurz r -Form — jeden Ausdruck

$$\sum A_{i_1, \dots, i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

In diesem Sinne sind die Pfaffschen Formen 1-Formen und die Funktionen können wir als Differentialformen nullten Grades bezeichnen oder auch als 0-Formen.

Betrachten wird das Produkt $\vartheta_1 \wedge \vartheta_2$ zweier Pfaffscher Formen.

Ist

$$\vartheta_1 = \sum A_i dx^i, \quad \vartheta_2 = \sum B_i dx^i,$$

so folgt

$$\begin{aligned} \vartheta_1 \wedge \vartheta_2 &= \sum A_i B_k dx^i \wedge dx^k \\ &= \sum_{i < k} (A_i B_k - A_k B_i) dx^i \wedge dx^k. \end{aligned}$$

Das heißt, das äußere Produkt zweier Pfaffscher Formen spiegelt das Vektorprodukt wider. Natürlich gilt wegen (1)

$$\vartheta_1 \wedge \vartheta_2 = -\vartheta_2 \wedge \vartheta_1, \quad (5)$$

was zwar nicht mehr als (1) beinhaltet aber ein allgemeinerer Ausdruck dafür ist. Man beachte, daß für jede Pfaffsche Form $\vartheta \wedge \vartheta = -\vartheta \wedge \vartheta = 0$ gilt.

Formel (5) ist wiederum nur ein Spezialfall folgenden Sachverhaltes: Ist Θ einer-Form und Θ^* eine s -Form, so gilt

$$\Theta \wedge \Theta^* = (-1)^{rs} \Theta^* \wedge \Theta \quad (6)$$

Nützlich ist auch folgende Regel:

Sind

$$\vartheta_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} dx^k, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Pfaffsche Formen, so ist

$$\vartheta_1 \wedge \vartheta_2 \wedge \dots \wedge \vartheta_n = \text{Det}(A_{ik}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Ein Spezialfall hiervon ist die schon unter (2c) genannte Formel

$$dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = \frac{\partial(y^1, \dots, y^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

3.

Nach diesen algebraischen Bemerkungen wenden wir uns der invarianten Integration zu, dem historischen Ausgangspunkt des Kalküls. Ist M ein n -dimensionaler Raum, so haben wir es in der Regel mit folgenden Integralen zu tun: gegeben ist ein r -dimensionaler Unterraum ($r \leq n$) G und eine r -Form Θ . Dann ist das Integral

$$\int_G \Theta \quad (7a)$$

zu bilden.

Ist x^i ein Koordinatensystem des Raumes M , so sei der Unterraum etwa durch

$$x^i = x^i(t_1, \dots, t_r), \quad i = 1, \dots, n \quad (7b)$$

gegeben und das Differential Θ kann auf die Gestalt

$$\Theta = \sum A_{i_1, \dots, i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad (7c)$$

gebracht werden. Dann ist

$$\int_G \Theta = \int_{t_1, \dots, t_r} h dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r \quad (7d)$$

mit

$$h = \sum A_{i_1, \dots, i_r} \frac{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_r})}{\partial(t_1, \dots, t_r)}. \quad (7e)$$

Es soll ausdrücklich betont werden, daß der Wert des Integrals (7) nur vom Unterraum G (und nicht

von seiner speziellen Darstellung mit Hilfe des Koordinatensystems x^i) und nur von der Differentialform Θ abhängt.

4.

Ehe wir nun zu den für die Physik so wichtigen Integralsätzen kommen, müssen wir innerhalb der alternierenden Differentiale eine Operation einführen, die Differentiation heißt und mit dem Zeichen d charakterisiert wird.

Ist Θ alternierendes Differential, so wollen wir ihm ein alternierendes Differential $d\Theta$ zuordnen. Dies geschieht so: Ist

$$\Theta = \sum f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_s \quad (8)$$

irgendeine der möglichen Darstellungen von Θ mit Hilfe von Funktionen f , g_k , so setzen wir

$$d\Theta = \sum df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_s \quad (8a)$$

Der inhaltliche Schwerpunkt dieser Definition liegt darin, daß sie völlig unabhängig ist von der Wahl der Darstellung (8). Wie immer ich Θ in die Gestalt (8) bringe und dann zu (8a) übergehe, stets erhalte ich das gleiche äußere Differential $d\Theta$, was wir hier freilich nicht beweisen wollen.

Die Operation d erhöht den Grad einer Differentialform um eins.

Zunächst finden wir, wenn wir (8a) nochmals anschreiben

$$d\Theta = \sum 1 \cdot df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_s,$$

die wichtige Formel von Poincaré:

$$d(d\Theta) = 0 \text{ oder einfach } d^2 = 0, \quad (9)$$

denn $d1 = \sum \frac{\partial 1}{\partial x^i} dx^i = 0$.

Ist weiterhin Θ eine r -Form und Θ^* eine s -Form, so kann man die Regel

$$d(\Theta \wedge \Theta^*) = d\Theta \wedge \Theta^* + (-1)^r \Theta \wedge d\Theta^* \quad (10)$$

beweisen.

Die Formeln

$$\begin{aligned} df &= \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \\ d(\sum f_k dx^k) &= \sum \frac{\partial f_k}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^k \\ &= \sum_{i < k} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^k} \right) dx^i \wedge dx^k \end{aligned} \quad (11)$$

zeigen, daß d auf Funktionen die Wirkung des Gradienten und auf 1-Formen (Vektoren) die Wirkung der Rotation besitzt. Ist weiterhin n die Dimension des zugrunde liegenden Raumes, so gilt

$$\begin{aligned} d \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} f_k dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \dots \wedge dx^n \\ = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x^k} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \end{aligned} \quad (12)$$

Hierbei handelt es sich also um die Verallgemeinerung der Operation Divergenz; denn man beachte, daß z. B. für $n = 3$ — $f_2 dx^1 \wedge dx^3 = f_2 dx^3 \wedge dx^1$ ist.

Wenden wir schließlich die Operation d auf das Differential Φ der elektromagnetischen Feldstärke (4) an. Man rechnet leicht nach, daß die Bedingung

$$d(B_1 dx^2 \wedge dx^3 + \dots + c E_1 dx^1 \wedge dt + \dots) = 0 \quad (13a)$$

mit den Forderungen

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}, \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (13b)$$

gleichbedeutend ist. (13a) beinhaltet also die erste Gruppe der Maxwell'schen Gleichungen.

Wir sehen aus dem bisherigen den engen Zusammenhang des Kalküls der alternierenden Differentialformen mit der Vektoranalysis. Tatsächlich gibt auf einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit die Regel von Poincaré $d^2 = 0$ gerade die Beziehungen $\text{rot grad} = 0$ und $\text{div rot} = 0$ wieder.

Nun folgt umgekehrt aus $\text{rot } \vec{A} = 0$ bzw. $\text{div } \vec{A} = 0$ die Darstellbarkeit $\vec{A} = \text{grad } f$ bzw. $\vec{A} = \text{rot } \vec{B}$. Diese Tatsachen haben ihr volles Analogon auch im Kalkül der Differentialformen:

Ist Θ ein alternierendes Differential mit $d\Theta = 0$, so existiert ein zweites alternierendes Differential ϑ mit $d\vartheta = \Theta$.

Dieser Satz gilt in euklidischen Räumen. In allgemeinen Räumen beliebiger topologischer Gestalt gilt er wenigstens im Bereich eines jeden Koordinatensystems. Mit anderen Worten: der Satz gilt nicht, wenn die Zusammenhangsverhältnisse des betrachteten Raumes zu kompliziert sind — ein Fall, der in der Physik recht selten auftritt.

Wenden wir den eben besprochenen Existenzsatz auf das Differential der elektromagnetischen Feldstärke an. Wegen (13a) existiert eine Pfaff'sche Form Φ mit $d\Phi = \Theta$. Schreibt man $\Phi = \sum A_i dx^i$, so ist A_i gerade das Viererpotential.

5.

Die Schwierigkeit, die bei jeder Formulierung von Integralsätzen in Räumen beliebiger Dimension auftritt, besteht in der Notwendigkeit, die Integrationsgebiete zu orientieren. Beim Stokes'schen Satz z. B. muß bei der Ausführung des Linienintegrals auf das richtige „Umfahren“ der Fläche geachtet werden, da sonst das falsche Vorzeichen herauskommt. Ebenso muß beim Gauß'schen Satz über die Oberfläche eines Volumens in der richtigen Weise integriert werden, da sonst das Integral zwar den richtigen Absolutwert, jedoch das falsche Vorzeichen erhält.

Ebenso, nur komplizierter, sind die Verhältnisse bei höheren Dimensionen, z. B. bei den Integralsätzen im Minkowski-Raum. Wir wollen die Diskussion über die Orientierung hier völlig ignorieren, da sie bei einigermaßen exakter Behandlung einen besonderen Vortrag gut füllen würde. In der praktischen Anwendung der Integralsätze ist übrigens das Orientierungsproblem meist ohne Bedeutung, da man meist das Vorzeichen des Integralwertes aus physikalischen Überlegungen kennt. Für viele allgemeine Überlegungen reicht es übrigens völlig, daß man weiß, daß man in geeigneter Weise die be-

treffenden Räume so orientieren kann, daß die allgemeinen Integralsätze gelten.

Nach dieser Vorbemerkung schreiben wir den allgemeinen Stokeschen Integralsatz auf:

Ist G ein r -dimensionales Gebiet eines n -dimensionalen Raumes und bezeichne $R(G)$ den Rand dieses Gebietes G , so gilt für jede Alternierende Form Θ vom Grade $(r - 1)$

$$\int_{R(G)} \Theta = \int_G d\Theta. \tag{14}$$

Diese bemerkenswerte Formel vereint eine Reihe von Integralsätzen. So haben wir z. B. für $n = 3$ und $r = 2$ den in der Vektoranalysis als Stokeschen Satz bezeichneten Integralsatz vor uns. Für $n = 3$ und $r = 3$ beinhaltet (14) den Gaußschen Integralsatz. Für $r = 1$ und beliebiges n ist G ein Weg (eine Linie, Kurve). Bezeichnet I seinen Anfangs- und II seinen Endpunkt, so entsteht

$$f(II) - f(I) = \int_G df.$$

Wegen (13a) kann man schließlich die beiden Maxwell'schen Gleichungen (13b) auf folgende relativistisch invariante Integralform bringen:

Ist G irgendein 3-dimensionaler Unterraum des Minkowski-Raumes, so ist

$$\int_{R(G)} (B_1 dx^2 \wedge dx^3 + \dots + c E_1 dx^1 \wedge dt + \dots) = 0 \tag{15}$$

6.

Bisher haben wir noch nicht erörtert, in welcher Weise die auf einem Raum gegebene Metrik

$$g_{ik} \cdot dx^i \cdot dx^k \tag{16}$$

ihre Widerspiegelung im Cartanschen Differentialkalkül findet. Dies wollen wir noch kurz tun. Im wesentlichen handelt es sich dabei um die Einführung des Operators der Dualität. Bezeichnen wir mit $|g|$ den Absolutbetrag der Determinante der g_{ik} und mit $\delta_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r}$ die Determinante

$$\delta_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r} = \begin{vmatrix} \delta_{k_1}^{i_1} & \delta_{k_1}^{i_2} & \dots & \delta_{k_1}^{i_r} \\ \delta_{k_2}^{i_1} & \dots & & \vdots \\ \vdots & & & \delta_{k_r}^{i_r} \end{vmatrix}.$$

Ist dann Θ eine r -Form

$$\Theta = \frac{1}{r!} \sum A_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}, \tag{17a}$$

so setzen wir

$$a\Theta = \frac{(-1)^{\binom{r}{2}}}{r!(n-r)!} \sum_{i_1, \dots, i_r} A_{i_1 \dots i_r} g^{i_1 k_1} \dots g^{i_r k_r} dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_r} \wedge \dots \wedge dx^{k_n} \delta_{k_1 \dots k_n}^{1 2 \dots n} |g|^{\frac{1}{2}}. \tag{17b}$$

Die Form $a\Theta$ wird gelegentlich die zu Θ duale Form genannt. Wir sehen aus der Definition (17), daß für zwei Differentiale Θ_1 und Θ_2 und zwei Funktionen f_1, f_2

$$a(f_1 \Theta_1 + f_2 \Theta_2) = f_1 a\Theta_1 + f_2 a\Theta_2$$

gilt. Deshalb läßt sich die Berechnung von a auf die Berechnung der Differentialformen $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$ zurückführen, wobei x^i ein beliebig wählbares Koordinatensystem ist.

Ehe wir nun einige allgemein gültige Formeln hinschreiben, wollen wir den Dualitätsoperator für die Minkowski-Metrik

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (cdt = dx^4) \tag{18a}$$

ausrechnen und eine Anwendung auf die Elektrodynamik machen. Setzen wir $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1$ so ist $g_{ik} = \varepsilon_i \delta_{ik}$.

Aus (17a) folgt dann die Darstellung

$$a\Theta = (-1)^{\binom{r}{2}} \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_n} A_{k_1 \dots k_r} \varepsilon_{k_1} \dots \varepsilon_{k_r} dx^{k_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{k_n} \delta_{k_1 \dots k_n}^{1 2 \dots n}. \tag{18b}$$

Wir schließen heraus die einfache Formel

$$a dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = (-1)^{\binom{r}{2}} \varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_r} dx^{i_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}, \tag{18c}$$

wobei i_1, \dots, i_n eine beliebige gerade Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, n$ ist.

Wenden wir nun a auf das Differential der elektromagnetischen Feldstärke an! Aus (18c) erhalten wir

$$a\Theta = a(B_1 dx^2 \wedge dx^3 + \dots + E_1 dx^1 \wedge dx^4 + \dots) = (-B_1 dx^1 \wedge dx^4 - \dots + E_1 dx^2 \wedge dx^3 + \dots) \tag{19a}$$

Nun bilden wir $da\Theta$ und erhalten

$$da\Theta = (\text{div } \vec{E}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial t} - \frac{\partial B_3}{\partial x^2} + \frac{\partial B_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + \dots \tag{19b}$$

Da wir im Vakuum $E_1 = D_1$ usw. setzen können, erhalten wir durch Einsetzen des zweiten Paares der Maxwell'schen Gleichungen

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{I} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}, \quad \text{div } \vec{D} = 4\pi \rho \tag{19c}$$

gerade

$$da\Theta = 4\pi \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \frac{4\pi}{c} I_1 dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 - \dots \tag{19d}$$

Bilden wir nun endlich $ada\Theta$, so folgt wegen (18c)

$$ada\Theta = -4\pi \rho dx^4 - \frac{4\pi}{c} I_1 dx^1 - \dots \tag{19e}$$

Nun bemerken wir, daß aus (18c) die Relation

$$a^2 = -1 \text{ bzw. } a^{-1} = -a \tag{18d}$$

folgt und definieren einen neuen Differentialoperator d^a durch

$$d^a = a^{-1} da. \tag{20}$$

Im Gegensatz zu d , das den Grad um eins erhöht, verringert d^a den Grad einer Differentialform um eins. Damit können wir die Maxwell'schen Gleichungen für das Vakuum endgültig schreiben:

$$d\Theta = 0, \quad d^a \Theta = 4\pi\sigma \quad (19f)$$

mit

$$\Theta = B_1 dx^2 \wedge dx^3 + \dots + E_1 dx^1 \wedge dx^4 + \dots,$$

$$\sigma = \frac{I_1}{c} dx^1 + \frac{I_2}{c} dx^2 + \frac{I_3}{c} dx^3 + \varrho dx^4$$

(19f) ist offenbar eine relativistisch invariante Formulierung der Elektrodynamik. Wenn wir uns vergegenwärtigen, daß in einer gekrümmten Raum-Zeit-Welt die metrische Fundamentalf orm (16) stets oskulierende Koordinatensysteme besitzt, für die (wenigstens in einem Punkte) die Gestalt (18a) vorliegt, so haben wir darüber hinaus die invariante Formulierung der Vakuumgleichungen bei beliebiger Metrik vor uns.

Übrigens kann man auf analogem Weg eine Formel für \mathbf{a}^2 für beliebige Metrik beweisen: Besitzt die betreffende Metrik die oskulierende Form

$$\sum \varepsilon_k dx^{k^2}, \quad \varepsilon_k = \pm 1, \quad (21a)$$

so gilt stets

$$\mathbf{a}^2 = (-1)^{\binom{n}{2}} \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \dots \cdot \varepsilon_n \quad (21b)$$

wobei n die Dimension des Raumes ist. Weiter ist allgemein

$$\mathbf{a} \mathbf{1} = |g|^{\frac{1}{2}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (22)$$

gerade das Volumenelement der betreffenden Metrik und sind

$$\Theta = \frac{1}{r!} \sum A_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r},$$

$$\Theta^* = \frac{1}{r!} \sum B_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad (23a)$$

zwei Differentialformen vom Grade r , so gilt

$$\begin{aligned} (-1)^{\binom{r}{2}} \Theta \mathbf{a} \Theta^* \\ = \frac{1}{r!} \sum A_{i_1 \dots i_r} B_{k_1 \dots k_r} g^{i_1 k_1} \dots g^{i_r k_r} \mathbf{a} \mathbf{1} \end{aligned} \quad (23b)$$

Es ist also

$$(\Theta, \Theta^*) = (\Theta^*, \Theta) = (-1)^{\binom{r}{2}} \int \Theta \mathbf{a} \Theta^* \quad (23c)$$

gerade das übliche Skalarprodukt.

Wir wollen den Vortrag mit der Bemerkung schließen, daß der Operator

$$\square = d d^a + d^a d \quad (24)$$

die folgerichtige Verallgemeinerung des Laplace-schen Operators ist, mit dem sich z. B. die Klein-Gordonsche Gleichung

$$\square \varphi - \kappa^2 \varphi = 0 \quad (25)$$

schreibt, wenn die Metrik zur Minkowskischen oskuliert.

Übrigens gelingt auch die allgemeine Formulierung der Greenschen Integralsätze leicht. Verschwinden die Differentiale genügend stark im Unendlichen, so nehmen diese Sätze mit dem durch (23c) eingeführten Skalarprodukt die übersichtliche Form

$$(d\vartheta, \Theta) + (\Theta, d^a \Theta) = 0 \quad (26a)$$

und

$$(d\vartheta, d\Theta) + (d^a \vartheta, d^a \Theta) + (\square \vartheta, \Theta) = 0,$$

$$(\vartheta, \square \Theta) = (\square \vartheta, \Theta) \quad (26b)$$

an.

Literatur

- P. Bidal, G. de Rham, Comm. Math. Helvet. 19, 1 (1949).*
E. Cartan, Leçons sur les invariants intégraux. Paris 1922.
C. Chevalley, Fundamental concepts of algebra. New York 1956.
W. V. D. Hodge, The theory and application of harmonic integrals. Cambridge 1952.
E. Kähler, 1. Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen. Leipzig, Berlin 1934.
 2. Abh. Math. Sem. Hamburg 12, 1 (1938).
 3. Algebra und Differentialrechnung. Bericht über die Mathematikertagung in Berlin vom 14. bis 18. 1. 1953. Berlin 1953.
K. Kodaira, G. de Rham, Harmonic integrals. Princeton (New Jersey) 1950.
A. Lichnerowicz, Lineare Algebra und lineare Analysis. Berlin 1956.
A. Uhlmann, Wiss. Zeitschr. der Friedrich-Schiller-Universität Jena 7 (1957/58), Heft 6 und 8 (1958/59), Heft 2/3.

(Eingegangen: 6. Juni 1959)