WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA · JAHRGANG 8 · 1958/59
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE REIHE · HEFT 2/3
HERAUSGEBER: DER REKTOR

Als Manuskript gedruckt

Aus dem Theoretisch-Physikalischen Institut. Direktor: Prof. Dr. K. Schuster

„Gemischte Differentiale" und das Transformationsverhalten einiger Feldgleichungen

Von
ARMIN UHLMANN

In einer vorhergehenden Arbeit [8] wurde der Begriff des alternierenden Differentials leicht verallgemeinert zu dem des gemischten (alternierenden) Differentials mit dem Ziel, die auf orientierbaren Mannigfaltigkeiten gültige Theorie von Hodge auf nicht-orientierbare Mannigfaltigkeiten zu übertragen. In dieser Arbeit wird das Transformationsverhalten einiger wichtiger Operatoren untersucht (Abschnitt 1—3) und die Resultate auf einige Feldgleichungen angewendet. Es handelt sich dabei um die Klein-Gordon-Gleichung (Abschnitt 4), die Maxwellschen Gleichungen (Abschnitt 5) und um eine Feldgleichung erster Ordnung vom Diracschen Typ (Abschnitt 6).

Die in der Arbeit [8] eingeführte Bezeichnungsweise wird durchgängig verwendet, ohne sie nochmals neu darzulegen.

1. *Die Transformation der g-Differentiale bei topologischen Abbildungen*

Ist σ eine topologische Abbildung der Mannigfaltigkeit M der Klasse C^∞ auf sich,

$$P \to P^\sigma, \quad P \in M \text{ bel.}$$

und f eine auf M erklärte Funktion, so ist durch

$$\sigma f(P) = f(P^\sigma)$$

eine neue Funktion σf definiert.

Von σ wollen wir „Differenzierbarkeit" verlangen: Ist f eine beliebige Funktion der Klasse C^∞ auf M, so sei stets auch σf beliebig oft differenzierbar.

Die Wirkung von σ auf Differentiale kann dann bekanntlich kurz durch die Formel

$$\vartheta = \Sigma f \cdot dg_1 \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_n$$
$$\sigma\vartheta = \Sigma \sigma f \cdot d\sigma g_1 \wedge d\sigma g_2 \wedge \dots \wedge d\sigma g_n$$

zusammengefaßt werden.

Wir bemerken weiter, daß σ die Gesamtheit der Koordinatensysteme in sich überführt; denn mit $\{x^i\}$ ist auch $\{\sigma x^i\}$ ein Koordinatensystem und σ^{-1} existiert.

Sei nun Θ ein g-Differential. Wir definieren dann

$$\sigma\Theta\,\{x^i\} = (\sigma\vartheta_1, \sigma\vartheta_2) \text{ falls } \Theta\,\{\sigma^{-1}x^i\} = (\vartheta_1, \vartheta_2) \tag{1}$$

ist. Wegen

$$\text{sign.}\,\frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} = \text{sign.}\,\frac{\partial(\sigma^{-1}x^1, \dots, \sigma^{-1}x^n)}{\partial(\sigma^{-1}y^1, \dots, \sigma^{-1}y^n)}$$

ist diese Definition einwandfrei.

Sofort ersichtlich ist die Vertauschbarkeit von σ mit der Differentiation d und der Orientierungskonjugation C:

$$\sigma d = d\sigma\,, \quad \sigma C = C\sigma \tag{2}$$

Fast trivial ist auch die Formel

$$\sigma(\Theta_1 \pm \Theta_2) = \sigma\Theta_1 \pm \sigma\Theta_2\,, \tag{3}$$

wegen der sich

$$\sigma(\Theta_1 \wedge \Theta_2) = \sigma\Theta_1 \wedge \sigma\Theta_2 \tag{3b}$$

auf den leicht überblickbaren Fall reduziert, daß Θ_1, Θ_2 skalar bzw. pseudoskalar sind.

Betrachten wir nun die durch σ bewirkte Änderung der Metrik

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k \to (\sigma\,ds)^2 = \sigma g_{ik}\, d\sigma x^i\, d\sigma x^k$$
$$\text{bzw. } (\sigma\,ds)^2 = \sigma g_{ik} \cdot \frac{\partial\sigma x^i}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial\sigma x^k}{\partial y^l} \cdot dy^j \cdot dy^l \tag{4}$$

wobei bei der letzten Zeile angenommen wurde, daß sich die Koordinatensysteme $\{\sigma x^i\}$ und $\{y^l\}$ überlappen. Wir bemerken, daß σg_{ik} die Komponenten des metrischen Tensors von $(\sigma\,ds)^2$ bezüglich des Koordinatensystems $\{\sigma x^i\}$ sind, wenn die g_{ik} zum Koordinatensystem $\{x^i\}$ gehörten.

Ist nun **a** der zur Metrik ds gehörende Dualitätsoperator, so bezeichne $\mathbf{a}^\sigma$ den entsprechenden Operator zur transformierten Metrik $\sigma\,ds$. Wir können dann die wichtige Beziehung

$$\sigma\,\mathbf{a} = \mathbf{a}^\sigma\sigma \tag{5}$$

beweisen:

Wegen (1) ist

$$\Theta\,\{x^i\} = (\vartheta, \vartheta^*) \quad \to \sigma\Theta\,\{\sigma x^i\} = (\sigma\vartheta, \sigma\vartheta^*)$$
$$\mathbf{a}\Theta\,\{x^i\} = (\vartheta_1, \vartheta_1{}^*) \to \sigma\,\mathbf{a}\Theta\,\{\sigma x^i\} = (\sigma\vartheta_1, \sigma\vartheta_1{}^*)\,.$$

Sei nun z. B.

$$\vartheta = \frac{1}{r!} A_{i_1\dots i_r}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r},$$

so ist

$$\vartheta_1 = \frac{(-1)^{\binom{r}{2}}}{r!\,(n-r)!} A_{i_1\dots i_r}\, g^{i_1k_1} \dots g^{i_rk_r}\, dx^{k_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{k_n}\, \delta^{1\dots n}_{k_1\dots k_n} |g|^{\frac{1}{2}}.$$

Also

$$\sigma\vartheta_1 = \frac{(-1)^{\binom{r}{2}}}{r!\,(n-r)!} \sigma A_{i_1\dots i_r}\, \sigma g^{i_1k_1} \dots \sigma g^{i_rk_r}\, d\sigma x^{k_{r+1}} \wedge \dots \wedge d\sigma x^{k_n}\, \delta^{1\dots n}_{k_1\dots k_n} |\sigma g|^{\frac{1}{2}}.$$

Nun sind aber $\sigma A_{i_1 \ldots i_r}$ die Komponenten von $\sigma\vartheta$ im Koordinatensystem $\{\sigma x^i\}$, und σg^{ik}, $|\sigma g|$ gehören eben zu diesem Koordinatensystem, wenn man die Metrik $(\sigma ds)^2$ zugrunde legt. Es ist folglich

$$\sigma \mathbf{a} \Theta \{\sigma x^i\} = \mathbf{a}^\sigma \sigma \Theta \{\sigma x^i\}$$

denn die Zuordnung $\vartheta^* \to \vartheta_1{}^*$ kann völlig analog behandelt werden.

Sei nun M *orientierbar* und zusammenhängend und seien S′ und S″ die beiden Klassen von Koordinatensystemen mit der Eigenschaft: Die Funktionaldeterminante zwischen zwei Koordinatensystemen ist genau dann positiv (negativ), wenn sie zu gleichen (verschiedenen) Klassen gehören. Die Gesamtheit der (differenzierbaren) topologischen Abbildungen σ von M auf sich zerfällt dann ebenfalls in zwei Klassen, je nachdem ob das Koordinatensystem $\{\sigma x^i\}$ zu gleichen Klasse wie $\{x^i\}$ gehört oder nicht. Diese Unterscheidung ist bekanntlich wegen

$$\sigma \frac{\partial (x^1, \ldots, x^n)}{\partial (y^1, \ldots, y^n)} = \frac{\partial (\sigma x^1, \ldots, \sigma x^n)}{\partial (\sigma y^1, \ldots, \sigma y^n)}$$

von der Wahl des benutzten Koordinatensystem unabhängig. Wir definieren deshalb

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} +1 \text{ falls } \sigma S' = S',\ \sigma S'' = S'', \\ -1 \text{ falls } \sigma S' = S'',\ \sigma S'' = S'. \end{cases} \tag{6}$$

Überlappen sich die Gültigkeitsbereiche der Koordinatensysteme $\{x^i\}$ und $\{\sigma x^i\}$, so ist

$$\varepsilon(\sigma) = \operatorname{sign} \frac{\partial (\sigma x^1, \ldots, \sigma x^n)}{\partial (x^1, \ldots, x^n)}.$$

Für zwei Abbildungen σ und τ gilt ferner

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau). \tag{6a}$$

Setzen wir für einen Moment

$$\varepsilon'\{x^i\} = \begin{cases} +1 \text{ falls } \{x^i\} \in S', \\ -1 \text{ falls } \{x^i\} \in S''. \end{cases}$$

Dann ist ein Operator $\mathbf{o}$ durch

$$\mathbf{o}\, \Theta \{x^i\} = \varepsilon'\{x^i\} \cdot (\beta, -\alpha) \text{ für } \Theta \{x^i\} = (\alpha, \beta)$$

definiert. Wir haben

$$\sigma \mathbf{o} \Theta \{\sigma x^i\} = \varepsilon' \{x^i\} \cdot (\sigma\beta, -\sigma\alpha)$$

und

$$\mathbf{o} \sigma \Theta \{\sigma x^i\} = \varepsilon' \{\sigma x^i\} \cdot (\sigma\beta, -\sigma\alpha).$$

D. h.

$$\sigma \mathbf{o} = \frac{\varepsilon' \{x^i\}}{\varepsilon' \{\sigma x^i\}} \mathbf{o} \sigma.$$

Dies ist aber identisch mit

$$\sigma \mathbf{o} = \varepsilon(\sigma) \cdot \mathbf{o} \sigma \tag{7}$$

2. Spezielle Transformationen

Sei

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k, \quad (\sigma\, ds)^2 = g'_{ik}\, dx^i\, dx^k \tag{8a}$$

und seien die zugehörigen Dualitätsoperatoren mit $\mathbf{a}$ und $\mathbf{a}^\sigma$ bezeichnet.

σ heißt genau dann *konform* (*bezüglich der Metrik* ds), wenn

$$g'_{ik} = \lambda \cdot g_{ik}, \quad \lambda = \lambda(\sigma) \tag{8b}$$

ist. Dabei ist λ eine reelle positive Funktion auf ganz M. Es gilt

$$\lambda(\tau\sigma) = \lambda(\tau) \cdot \tau\lambda\,(\sigma). \tag{8c}$$

Die zu einer gegebenen Metrik $(ds)^2$ gehörende Gesamtheit der konformen Transformationen bildet natürliche eine Gruppe $\Lambda = \Lambda\,(ds^2)$. Wir wollen sagen, die konforme Abbildung σ sei *speziell*, wenn $\lambda(\sigma)$ konstant ist. Nach (8c) bilden die speziellen konformen Transformationen ebenfalls eine Gruppe $\Lambda_0 = \Lambda_0\,(ds^2)$. Schließlich bilden die Abbildungen mit $\lambda(\sigma) = 1$ die *isometrische* oder *orthogonale* Gruppe zu ds^2.

Um $\mathbf{a}^\sigma$ auszurechnen für $\sigma \in \Lambda\,(ds^2)$ haben wir in der Formel für $\mathbf{a}$ überall g_{ik} durch λg_{ik} mit $\lambda = \lambda\,(\sigma)$ zu ersetzen. Ist $\Theta\,\{x^i\} = (\alpha, \beta)$ und α und β vom Grade r, so haben in $\mathbf{a}\ \Theta\,\{x^i\} = (\alpha', \beta')$ die Differentiale α' und β' den Grad $n - r$ (n = Dimension von M). Betrachten wir nur die Abhängigkeit der α', β' vom metrischen Tensor, so haben wir Linearkombination mit Koeffizienten der Form

$$\text{Zahl} \cdot g^{i_1 k_1} \ldots g^{i_r k_r} \cdot |g|^{\frac{1}{2}} \tag{x}$$

vor uns. Der Übergang $g_{ik} \to \lambda g_{ik}$ bringt

$$g^{ik} \to \lambda^{-1} g^{ik}, \quad |g| \to \lambda^n |g|$$

mit sich. Also multipliziert sich (x) mit

$$\lambda^{\frac{n}{2} - r}.$$

Bezeichnet G den Gradoperator,

$$G\Theta = r\Theta \text{ falls Grad } \Theta = r,$$

so haben wir also

$$\mathbf{a}^\sigma = \mathbf{a}\lambda(\sigma)^{\frac{n}{2} - G} = \lambda(\sigma)^{G - \frac{n}{2}}\, \mathbf{a}, \tag{9a}$$

bzw.

$$\sigma \mathbf{a} = \lambda(\sigma)^{G - \frac{n}{2}}\, \mathbf{a}\sigma = \mathbf{a}\sigma\lambda(\sigma)^{\frac{n}{2} - G}. \tag{9b}$$

Von Pauli stammt der Gedanke, neben den konformen Abbildungen ganz allgemein eine Transformation

$$g_{ik} \to \lambda g_{ik}, \quad P \to P, \quad P \in M \tag{10}$$

zu betrachten, wobei $\lambda \neq 0$ beliebiges Vorzeichen besitzen darf [6]. Wir wollen die Gesamtheit der Transformationen (10) als die *konformen Eichtransformationen* bezeichnen. Natürlich hängen die konformen Eichtransformationen nicht unmittelbar mit den konformen Abbildungen zu einer gegebenen Metrik zusammen. Während letzter als Ausgangspunkt eine Punkttransformation der Mannigfaltigkeit M besitzen; die die Veränderung der Metrik induziert, hängen die konformen Eichtransformationen überhaupt nicht mit den Abbildungen der Punkte der Mannigfaltigkeit zusammen. (Die konformen Eichtransformationen sind spezielle Abbildungen des Faserraumes der symmetrischen kovarianten Tensoren zweiten Grades auf sich.) Bemerken wir schließlich, daß die Gesamtheit aller möglichen g_{ik} durch (10) auf sich abgebildet wird und deshalb die konformen Eichtransformationen nicht in bezug auf ein spezielles g_{ik} gebildet sind — ganz im Gegensatz zu den konformen Abbildungen, die sich nur bezüglich einer bestimmten Metrik konform verhalten.

Trotz dieses gegensätzlichen Verhaltens können wir die zur Gleichung (9) führende Rechnung für konforme Eichtransformationen übernehmen und sagen:

Die konforme Eichtransformation (10) zieht

$$\mathbf{a} \to \mathbf{a}\lambda^{\frac{n}{2} - G} = \lambda^{G - \frac{n}{2}} \mathbf{a} \tag{11}$$

nach sich.

Wir wollen nun auf Grund von (11) die Transformation des Operators $d^{\mathbf{a}}$ berechnen. Da $\mathbf{a}^2 = \pm 1$ ist, ist $\mathbf{a}^{-1} = \pm \mathbf{a}$ und es langt $\mathbf{a} d \mathbf{a}$ zu betrachten.

Ist Θ vom Grade r, so ist

$$\mathbf{a} d \mathbf{a} \to \mathbf{a} \lambda^{r - 1 - \frac{n}{2}} d\lambda^{+\frac{n}{2} - r} \mathbf{a}.$$

Aus

$$\lambda^{r - 1 - \frac{n}{2}} d\lambda^{\frac{n}{2} - r} = \lambda^{r - 1 - \frac{n}{2}} \lambda^{\frac{n}{2} - r} d + \lambda^{r - 1 - \frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} - r\right) \lambda^{\frac{n}{2} - r - 1} (d\lambda)$$

folgt

$$\mathbf{a} d \mathbf{a} \to \lambda^{-1} \mathbf{a} d \mathbf{a} + \left(\frac{n}{2} - r\right) \lambda^{-1} \mathbf{a} \left(\frac{d\lambda}{\lambda}\right) \mathbf{a}.$$

Also ist

$$d^{\mathbf{a}} \to \lambda^{-1} d^{\mathbf{a}} + \lambda^{-1} \left(\frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{\mathbf{a}} \left(\frac{n}{2} - G\right) \tag{12a}$$

$$\text{mit} \quad \left(\frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^{-1} \left(\frac{d\lambda}{\lambda}\right) \mathbf{a}$$

Hieraus können wir offenbar schließen, daß auch für die konformen Abbildungen $\sigma \in \Lambda\,(ds^2)$ eine ähnliche Beziehung gilt:

$$\sigma d^{\mathbf{a}} = \left[\lambda^{-1}(\sigma)\, d^{\mathbf{a}} + \lambda^{-1}(\sigma) \left(\frac{d\lambda(\sigma)}{\lambda(\sigma)}\right)^{\mathbf{a}} \left(\frac{n}{2} - G\right)\right] \sigma \tag{12b}$$

Ein wichtiger Spezialfall ist

$$\sigma d^{\mathbf{a}} = \lambda^{-1}(\sigma)\, d^{\mathbf{a}} \sigma \quad \text{für } \sigma \in \Lambda_0(ds^2); \tag{12c}$$

denn hier ist $d\lambda(\sigma) = 0$. Natürlich hat auch diese Formel ein Analogon für gewisse konforme Eichtransformationen, die wir ebenfalls durch den Zusatz „speziell“ kennzeichnen wollen. Es sind diejenigen Transformationen (10), für die λ konstant ist.

Betrachten wir nun den **Laplace-Beltrami-de Rham**-Operator

$$\Box = d d^{\mathbf{a}} + d^{\mathbf{a}} d$$

(In der Arbeit [8] wurde hierfür Δ geschrieben). Aus (12a) folgt, daß die konforme Eichtransformation (10) den Übergang

$$\Box \to \lambda^{-1} \Box - \lambda^{-1} \left[\frac{d\lambda}{\lambda} d^{\mathbf{a}} + \left(\frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{\mathbf{a}} d\right] + \lambda^{-1} \left[d \left(\frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{\mathbf{a}} + \left(\frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{\mathbf{a}} + \left(\frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{\mathbf{a}} d\right] \left(\frac{n}{2} - G\right) - \frac{d\lambda}{\lambda} \left(\frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{\mathbf{a}} \left(\frac{n}{2} - G\right) \tag{13a}$$

nach sich zieht. Die analoge Formel für die konformen Abbildungen versteht sich von selbst.

Eine entscheidende Vereinfachung tritt ein, wenn wir uns auf spezielle Eichtransformationen bzw. spezielle konforme Abbildungen beschränken. Dann erhält man

$$\sigma \Box = \lambda^{-1}(\sigma) \Box \sigma \quad \text{für } \sigma \in \Lambda_0(ds^2) \tag{13b}$$

bzw.

$$\Box \to \lambda^{-1} \Box. \tag{13c}$$

3. Der Laplace-Beltrami-de Rham-Operator

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, daß M ein 4-dimensionaler zusammenhängender Raum ist. Auf ihm sei eine Metrik

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

gegeben, die mit geeigneten **Pfaffschen** Formen ω_k die Form

$$ds^2 = \omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 + \omega_3{}^2 - \omega_4{}^2$$

annimmt. Es ist dann

$$\mathbf{a}^2 = -1.$$

Sei $\{y^i\}$ ein oskullierendes Koordinatensystem zu ds^2 im beliebig gewählten Punkt P_0 von M. Aus

$$\Theta\,\{y^i\} = (\alpha, \beta), \quad \Box\,\Theta\,\{y^i\} = (\Box\alpha, \Box\beta) \tag{14a}$$

(siehe [8]) und

$$\begin{aligned} \alpha &= \Sigma A_{k_1 \ldots k_r}\, dy^{k_1} \wedge \ldots \wedge dy^{k_r} \\ \Box\alpha &= \Sigma A'_{k_1 \ldots k_r}\, dy^{k_1} \wedge \ldots \wedge dy^{k_r} \end{aligned} \tag{14b}$$

folgt dann nach einer Rechnung von **Bidal** und **de Rham** [1] an der Stelle P_0

$$A'_{k_1 \ldots k_r} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_3{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_4{}^2}\right) A_{k_1 \ldots k_r} + \varrho A_{k_1 \ldots k_r}. \tag{14c}$$

Hierbei bezeichnet ϱ einen (von den Indizes k_i abhängenden) Differentialoperator höchstens erster Ordnung.

4. Die Klein-Gordon-Gleichung

Wegen (14) ist

$$(\Box - m_0{}^2)\, \Theta = 0 \tag{15}$$

eine Wellengleichung vom **Klein-Gordonschen** Typ. Ist Θ eine Funktion (d. h. vom Grade Null), so sind durch $C\Theta = \pm \Theta$ gerade die beiden wichtigen Fälle des skalaren und pseudoskalaren einkomponentigen Feldes gegeben.

Allgemein folgt aus (15) und

$$\Theta = \Sigma\Theta_k, \quad G\Theta_k = k\Theta_k$$

daß auch

$$(\Box - m_0{}^2)(1 + C)\, \Theta_k = 0$$

und

$$(\Box - m_0{}^2)(1 - C)\, \Theta_k = 0$$

für alle k gilt; denn G und C sind mit $\Box$ vertauschbar [8].

Man kann hieraus einen interessanten Schluß ziehen. Ist M nicht orientierbar, so ist die Gesamtheit der Lösungen Θ von (15) mit $C\Theta = \Theta$, $G\Theta = r\Theta$ *wesentlich* von der Menge der Lösungen Θ mit $C\Theta = -\Theta$, $G\Theta = r\Theta$ verschieden. Ist dagegen M orientierbar, so existiert ein Operator $\mathbf{o}$, der s-Differentiale in ps-Differentiale überführt und mit $\Box$ vertauschbar ist [8]. Die beiden eben angegebenen Lösungsmannigfaltigkeiten werden also durch $\mathbf{o}$ ineinander überführt. Die Orientierbarkeit bedingt also eine Verminderung der wesentlich verschiedenen Lösungstypen von (15) bzw. eine Verringerung der Zahl der wesentlich verschiedenen „freien“ Feldgleichungen. Es liegt also eine *Entartung durch die Orientierbarkeit* vor. Die Erfahrung zeigt, daß diese Entartung aufgehoben wird, wenn man die Gleichungen für die Wechselwirkungen der Felder betrachtet (skalare und pseudoskalare Kopplung!). Durch die Typen der möglichen Wechselwirkung der

Felder wird somit die durch die Orientierbarkeit bedingte Entartung aufgehoben.

Wenden wir auf (15) ein $\sigma \in \Lambda_0\,(ds^2)$ an, so folgt wegen (13b)

$$\sigma(\Box - m_0^2)\,\Theta = (\lambda_{(\sigma)}^{-1}\,\Box - m_0^2)\,\sigma\Theta = 0$$

und somit

$$(\Box - \lambda(\sigma)\,m_0^2)\,\sigma\Theta = 0.$$

D. h. die Klein-Gordon-Gleichung ist gegenüber der simultanen Transformation

$$\begin{aligned} &\Theta \to \sigma\Theta \\ &m_0 \to \lambda^{\frac{1}{2}}(\sigma)\,m_0 \end{aligned} \tag{16}$$

invariant.

Aus (15) folgt analog

$$(\lambda^{-1}\,\Box - \lambda\,m_0^2)\,\Theta = 0.$$

D. h. (15) ist wegen (13c) invariant gegenüber der speziellen konformen Eichtransformation

$$\begin{aligned} &g_{ik} \to \lambda g_{ik}, \\ &\Theta \to \Theta, \\ &m_0 \to \lambda^{-\frac{1}{2}}\,m_0. \end{aligned} \tag{17}$$

Betrachten wir einen „Weg“ w in M, d. h. eine Abbildung $\tau \to P(\tau)$ des Intervalls $0 \leqq \tau \leqq 1$ auf Punkte von M. Dann verstehen wir unter w^σ den Weg $\tau \to P^\sigma(\tau)$. Wir betrachten die „Länge“

$$s(w) = \int_w \sqrt{g_{ik}\,dx^i\,dx^k}$$

des Weges w. (Diese ist außerhalb des Lichtkegels bis auf ein Vorzeichen eindeutig bestimmt, da dort die Wurzel längs w eindeutig fortsetzbar ist.) Aus der allgemein gültigen Formel

$$\int_{w^\sigma} \sqrt{g_{ik}\,dx^i\,dx^k} = \int_w \sigma\sqrt{g_{ik}\,dx^i\,dx^k}$$

finden wir für den Fall $\sigma \in \Lambda_0\,(ds^2)$

$$\int_w \sigma\sqrt{g_{ik}\,dx^i\,dx^k} = \sqrt{\lambda(\sigma)}\int_w \sqrt{g_{ik}\,dx^i\,dx^k}$$

und somit

$$s(w^\sigma) = \lambda(\sigma)^{\frac{1}{2}} \cdot s(w) \text{ für } \sigma \in \Lambda_0(ds^2). \tag{16a}$$

(Man beachte, daß die konformen Abbildungen den Lichtkegel invariant lassen und deshalb mit w auch w^σ den Lichtkegel nicht schneidet.)

Betrachten wir andererseits die konformen Eichtransformationen, so haben wir zu (17) noch den Übergang

$$ds \to \lambda^{\frac{1}{2}}\,ds \tag{17a}$$

hinzuzufügen.

Wir können nunmehr das Invarianzverhalten der Gleichung (15) auch durch

$$\begin{aligned} &\Theta \to \sigma\Theta;\quad \sigma \in \Lambda_0(ds^2) \\ &m_0 s(w) \to m_0 s(w^\sigma);\quad \text{w bel. Weg} \end{aligned} \tag{16b}$$

bzw.

$$\begin{aligned} &g_{ik} \to \lambda g_{ik},\quad \Theta \to \Theta, \\ &m_0 ds \to m_0 ds,\quad \lambda = \text{konstant} \end{aligned} \tag{17b}$$

kennzeichnen.

5. *Die Kählersche Form der Maxwellschen Gleichungen*

Wir betrachten die allgemein gültige Beziehung

$$\begin{aligned} d[(f_1 dx^1 &+ f_2 dx^2 + f_3 dx_3) \wedge dx^4 + g_2 dx^3 dx^1 \\ &+ g_3 dx^1 dx^2 + g_1 dx^2 dx^3] \\ &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial g_3}{\partial x^4}\right) dx^1\,dx^2\,dx^4 \\ &+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3} + \frac{\partial g_1}{\partial x^4}\right) dx^2\,dx^3\,dx^4 \\ &+ \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^3} - \frac{\partial f_3}{\partial x^1} + \frac{\partial g_2}{\partial x^4}\right) dx^3\,dx^1\,dx^4 \\ &+ \left(\frac{\partial g_1}{\partial x^1} + \frac{\partial g_2}{\partial x^2} + \frac{\partial g_3}{\partial x^3}\right) dx^1\,dx^2\,dx^3 \end{aligned}$$

und vergleichen sie mit den Maxwellschen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} + \frac{\partial B_1}{\partial x^4} = 0 \quad \text{usw.} \\ &\frac{\partial B_1}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial x^3} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{18a}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H_3}{\partial x^2} - \frac{\partial H_2}{\partial x^3} - \frac{\partial D_1}{\partial x^4} = 4\pi\,I_1 \quad \text{usw.} \\ &\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x^2} + \frac{\partial D_3}{\partial x^3} = 4\pi\,\varrho\,. \end{aligned}\right\} \tag{18b}$$

Die Gleichungen (18a) werden durch den schiefsymmetrischen Minkowski-Tensor zusammengefaßt und das ihm entsprechende alternierende Differential ist [7]

$$\begin{aligned} \vartheta_1 = (E_1\,dx^1 + \cdots + E_3\,dx^2) \wedge dx^4 &+ B_1\,dx^2\,dx^3 \\ + B_2\,dx^3\,dx^1 &+ B_3\,dx^1\,dx^2. \end{aligned}$$

Wir sehen, daß (18a) mit

$$d\vartheta_1 = 0 \tag{19a}$$

identisch ist.

Im Vakuum wird nun üblicherweise $\vec{E} = \vec{D}$, $\vec{H} = \vec{B}$ gesetzt. Kähler [7] gab jedoch 1938 zum Zwecke der Lösung des Anfangswertproblems der Maxwellschen Gleichungen bei beliebiger Metrik eine andere Form an, nach der $\vec{D}$ und $\vec{B}$ einerseits und $\vec{E}$ und $\vec{H}$ andererseits analoges Transformationsverhalten zeigen. Hiernach transformieren sich $\vec{E}$ und $\vec{H}$ vektoriell, während $\vec{D}$ und $\vec{B}$ den Charakter von schiefsymmetrischen Tensoren 2. Grades besitzen. Dies ist gewiß ganz im Sinne der Cartanschen invarianten Integration, da mit $\vec{E}$ und $\vec{H}$ Linienintegrale, mit $\vec{B}$ und $\vec{D}$ aber Flächenintegrale gebildet werden. Kähler setzt deshalb

$$\begin{aligned} \vartheta_2 = &-(H_1\,dx^1 + H_2\,dx^2 + H_3\,dx^3) \wedge dx^4 \\ &+ D_1\,dx^2\,dx^3 + D_2\,dx^3\,dx^1 + D_3\,dx^1\,dx^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \omega = \varrho\,dx^1\,dx^2\,dx^3 &- (I_1\,dx^2\,dx^3 + I_2\,dx^3\,dx^1 \\ &+ I_3\,dx^1\,dx^2) \wedge dx^4. \end{aligned}$$

Man sieht unter anderen, daß das Integral von ω über ein raumartiges Gebiet die in diesem Gebiet enthaltene Ladung angibt.

Ein Blick auf die am Anfang des Abschnittes erwähnte Formel lehrt, daß die zweite Gruppe der Maxwellschen Gleichungen (18b) mit

$$d\vartheta_2 = 4\pi\,\omega \qquad (19\text{b})$$

identisch ist.

Die bemerkenswerteste Eigenschaft des Gleichungssystems (19) besteht ohne Zweifel darin, daß es unabhängig von den herrschenden metrischen Verhältnissen ist. Es folgt hieraus z. B., daß mit ϑ_1, ϑ_2, ω auch die Formen $\sigma\vartheta_1$, $\sigma\vartheta_2$, $\sigma\omega$ das Gleichungssystem (19) erfüllen, wie auch immer die topologische Abbildung σ gewählt sein möge. Dies folgt sofort aus Formel (2).

Die Verbindung zwischen ϑ_1 und ϑ_2 ist natürlich abhängig von der Metrik. Sie wird wie folgt festgelegt: Ist $\{x^k\}$ ein im Punkte P_0 oskullierendes Koordinatensystem, so sei

$$H_k(P_0) = B_k(P_0)\,, \quad E_k(P_0) = D_k(P_0) \qquad (x)$$

Diese Forderung ist durch das Gleichungssystem (19) jedoch nicht völlig erfüllbar: Die Gesamtheit der in einem Punkt P_0 oskullierenden Koordinatensysteme zerfällt entsprechend dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante in zwei Klassen („Orientierung im Kleinen“) und nur für eine dieser beiden Klassen ist (x) erfüllbar. Hierdurch wird die Elektrodynamik orientierungsabhängig, was offenbar den Tatsachen widerspricht. Man kann jedoch (x) erfüllen und gleichzeitig (19), wenn man zu g-Differentialen übergeht.

Behalten wir den aus $\vec{E}$ und $\vec{D}$ zusammengesetzten Minkowski-Tensor bei, so muß das ϑ_1 entsprechende g-Differential skalar sein. Wir setzen

$$\Theta_1\,\{x^i\} = (\vartheta_1, \vartheta_1).$$

Nun rechnen wir $\mathbf{a}\,\Theta_1$ unter Benutzung eines oskulierenden Koordinatensystems $\{y^i\}$ aus. Es ist dann

$$|g| = 1,\ g^{ik} = \varepsilon_k\,\delta^{ik},\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\,\varepsilon_4 = 1$$

und aus der Hilfsrechnung

$$A_{ik}\,dx^i\,dx^k \to \frac{(-1)^{\binom{2}{2}}}{2!\ 2!}\,A_{ik}\,\varepsilon_i\,\varepsilon_k\,\delta^{ij}\,\delta^{kl}\,\delta^{1235}_{jlrs}\,dx^r\,dx^s$$

finden wir

$$A_{ik} \to A_{rs}\,\varepsilon_r\,\varepsilon_s\,\delta^{1234}_{rsik}$$

bzw.

$$\begin{aligned} A_{12} &\to -A_{43}, & A_{14} &\to A_{23},\\ A_{23} &\to -A_{14}, & A_{24} &\to A_{31},\\ A_{31} &\to -A_{24}, & A_{34} &\to A_{12}. \end{aligned}$$

Nun setzen wir z. B. $A_{12} = B_3$ und dies soll übergehen in $-A_{34} = H_3$ und ebenso soll $A_{24} = E_1$ zu $A_{23} = D_1$ werden usw. Wir setzen deshalb

$$\Theta_2\,\{x^i\} = (\vartheta_2, -\vartheta_2),\ \ \Omega\,\{x^i\} = (\omega, -\omega)$$

und erhalten folgende Form der Maxwellschen Gleichungen, die die Bedingung (x) vollständig erfüllt:

$$\begin{aligned} &d\Theta_1 = 0, \quad d\Theta_2 = 4\pi\,\Omega \quad (\text{Maxwell-Gl.}) \qquad (20)\\ &\mathbf{a}\,\Theta_1 = \Theta_2 \qquad\qquad\qquad (\text{Vakuum-Gl.}) \end{aligned}$$

Hierbei ist Θ_1 ein skalares und Θ_2 ein pseudoskalares Differential vom Grade 2.

Die (modifizierte) Kählersche Form geht natürlich bei Elimination von Θ_2 in die Minkowskische über. Diese lautet im Differentialkalkül

$$d\Theta_1 = 0, \quad d^{\mathbf{a}}\Theta_1 = 4\pi\,\Omega^* \qquad (21\text{a})$$

mit

$$\Omega^* = \mathbf{a}\,\Omega. \qquad (21\text{b})$$

Da Θ_1 und Ω^* s-Differentiale sind, ist

$$\Omega^*\,\{x^i\} = (\omega^*, \omega^*), \quad \Theta_1\,\{x^i\} = (\vartheta_1, \vartheta_1)$$

und (21c) deshalb mit

$$d\vartheta_1 = 0\,, \quad d^{\mathbf{a}}\vartheta_1 = 4\pi\,\omega^* \qquad (21\text{c})$$

identisch.

(20) ist gerade deswegen interessant, weil aus dieser Formel die Wirkung der Metrik besonders klar ersichtlich ist: Die Metrik regelt die Verknüpfung des Paares $(\vec{E}, \vec{B})$ mit dem Paar $(\vec{D}, \vec{H})$ und nichts sonst. In diesem Sinne wirkt eine Veränderung des metrischen Tensors „polarisierend“ auf das Vakuum.

Mögen nun Θ_1, Θ_2, Ω die Gleichungen (20) erfüllen und sei σ eine *beliebige* topologische Abbildung von M auf sich. Dann wird aus (20)

$$\begin{aligned} &d\sigma\Theta_1 = 0,\\ &d\sigma\Theta_2 = 4\pi\sigma\Omega\,, \quad \mathbf{a}^{\sigma}\sigma\Theta_1 = \sigma\Theta_2. \end{aligned}$$

Sei nun $\sigma \in \Lambda(ds^2)$. Da Θ_1 vom Grade 2 ist, M die Dimension $n = 4$ besitzt, folgt aus (9) $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\sigma}$. Deshalb gilt: Die Gleichungen (20) gestatten die Transformation.

$$\begin{aligned} &\Theta_1 \to \sigma\Theta_1\,,\\ &\Theta_2 \to \sigma\Theta_2\,, \qquad \sigma \in \Lambda(ds^2) \qquad (22)\\ &\Omega \to \sigma\Omega. \end{aligned}$$

Für den Fall $(ds)^2$ = Minkowski-Metrik ist dies gerade die von Cunnigham und Bateman [2], [3] entdeckte Invarianz der Maxwellschen Gleichungen.

Aus Formel (11) folgt ebenso leicht, die Invarianz von (20) gegen konforme Eichtransformationen:

$$\begin{aligned} &\Theta_1 \to \Theta_1\,, \quad \Theta_2 \to \Theta_2\,, \quad \Omega \to \Omega\,,\\ &\qquad g_{ik} \to \lambda g_{ik}\,. \end{aligned} \qquad (23)$$

Für den Fall der Minkowski-Metrik wurde diese Invarianzeigenschaft von Infeld und Schild [4] bemerkt.

Wir bemerken, daß in (23) $\lambda \neq 0$ eine beliebige Funktion sein kann. Zwei Metriken $(ds)^2$ und $(ds')^2$ gehen nun genau dann gemäß (23) bzw. (10) auseinander hervor, wenn die Formen

$$g_{ik}\,X^i\,X^k \text{ und } g'_{ik}\,X^i\,X^k$$

die gleichen Nullstellen besitzen. Da diese den Lichtkegel beschreiben, gilt:

Gehören zu zwei Metriken gleiche Lichtkegel, so sind die zugehörigen Vakuumgleichungen der Elektrodynamik identisch. (Im Gegensatz zur Klein-Gordon-Gleichung!)

6. Eine Feldgleichung 1. Ordnung

Pauli hat nachgewiesen, daß die Dirac-Gleichung nicht konform-invariant ist [5], selbst wenn der Fall verschwindender Ruhemasse vorliegt. Dies ist wegen der durch (16) und (17) ausgedrückten Transformationseigenschaft der Klein-Gordon-Gleichungen zumindest für die speziellen konformen

Abbildungen (konformen Eichtransformationen) recht merkwürdig. Eine Gleichung vom Diracschen Typ soll deshalb untersucht werden.

Nach dem Vorbild von Dirac wird man versuchen, die „Wurzel" aus dem Differentialoperator $\square$ zu ziehen. Eine solche Wurzel ist z. B. der Operator

$$\mathrm{d} + \mathrm{d^a};$$

denn wegen $\mathrm{d}^2 = (\mathrm{d^a}) = 0$ ist sein Quadrat gleich $\square$ und aus

$$(\mathrm{d} + \mathrm{d^a} + \mathrm{m})\, \Theta = 0 \tag{24}$$

folgt nach Multiplikation mit $\mathrm{d} + \mathrm{d^a} - \mathrm{m}$, daß Θ auch der Klein-Gordon-Gleichung (15) genügt.

Es ist klar, daß (24) gegen die zu ds^2 gehörende orthogonale Gruppe invariant ist. Viel komplizierter ist jedoch bereits der Fall der speziellen konformen Abbildungen, da

$$\sigma(\mathrm{d} + \mathrm{d^a}) = (\mathrm{d} + \lambda^{-1}(\sigma)\, \mathrm{d^a})\, \sigma \quad \text{für } \sigma \in \Lambda_0(\mathrm{ds})$$

ist. Von einer Invarianz der Gleichung (24) gegenüber der Gruppe Λ_0 kann also nicht die Rede sein. Da

$$(\mathrm{d} + \mathrm{d^a})^2 = \square$$

ein einfaches Verhalten beim Vertauschen mit Elementen der Gruppe Λ_0 zeigt, $\mathrm{d} + \mathrm{d^a}$ aber nicht, kann dieser Umstand nur von der Vieldeutigkeit des „Wurzelziehens" aus $\square$ herrühren. Tatsächlich gilt für eine beliebige Zahl μ ungleich Null

$$(\mu \mathrm{d} + \mu^{-1}\mathrm{d^a})^2 = \mathrm{d}\mathrm{d^a} + \mathrm{d^a}\mathrm{d} = \square \tag{25}$$

Zur Vergrößerung der Symmetrieeigenschaften ersetzen wir deshalb (24) durch

$$(\mu \mathrm{d} + \mu^{-1}\mathrm{d^a} + \mathrm{m})\, \Theta(\mu) = 0. \tag{26}$$

Es soll also Θ noch von einem Parameter abhängen. Nun ist für $\sigma \in \Lambda_0(\mathrm{ds}^2)$

$$\begin{aligned}\sigma(\mu \mathrm{d} + \mu^{-1}\mathrm{d^a} + \mathrm{m})\, \Theta(\mu) \\ = (\mu \mathrm{d} + \mu^{-1}\lambda^{-1}(\sigma)\, \mathrm{d^a} + \mathrm{m}_0)\, \sigma\Theta(\mu).\end{aligned}$$

Es gibt Zahlen ν und μ_1 mit

$$\nu(\mu \mathrm{d} + \mu^{-1}\lambda^{-1}\mathrm{d^a}) = \mu_1 \mathrm{d} + \mu_1{}^{-1}\mathrm{d^a},$$

nämlich

$$\nu = \sqrt{\lambda}\,, \quad \mu_1 = \sqrt{\lambda}\cdot\mu\,.$$

Aus (26) folgt also nach Anwendung von σ und Multiplikation mit $\sqrt{\lambda}$ die Gleichung

$$(\mu_1 \mathrm{d} + \mu_1{}^{-1}\mathrm{d^a} + \sqrt{\lambda}\,\mathrm{m})\, \sigma\Theta(\mu)\,.$$

Die Gleichung (26) ist also invariant gegenüber der Substitution

$$\left.\begin{aligned}\Theta(\mu) &\to \sigma\Theta\,(\lambda^{-\frac{1}{2}}(\sigma)\,\mu)\,,\\ \mathrm{m} &\to \lambda^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{m}\,,\end{aligned}\right. \quad \sigma \in \Lambda_0(\mathrm{ds}^2) \tag{27}$$

Ebenso berechnet sich der Übergang von (26) bei speziellen konformen Eichtransformationen zu

$$\begin{aligned} g_{ik} \to \lambda g_{ik}\,, \quad \mathrm{m} \to \lambda^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{m}\,.\\ \Theta(\mu) \to \Theta(\lambda^{\frac{1}{2}}\,\mu).\end{aligned} \tag{28}$$

Wir müssen uns nun noch mit der μ-Abhängigkeit der Gleichung (26) beschäftigen. μ tritt als neuer Freiheitsgrad auf. Es ist leicht nachzuprüfen, daß die μ-Abhängigkeit nicht ohne weitere zusätzliche Annahmen bestimmt werden kann. Eine besonders einfache und interessante ist durch den Ansatz

$$\Theta(\mu) = \Theta_0 + \mu\Theta_1 + \mu^{-1}\Theta_2 \tag{29}$$

gegeben. Nach Eintragen von (29) in (26) finden wir, daß ein in μ rationales Polynom mit Differentialen als Koeffizienten Null sein muß. Es folgt, daß diese Koeffizienten einzeln verschwinden müssen, was zu den Gleichungen

$$\mathrm{d^a}\Theta_2 = 0 \quad \mathrm{d}\Theta_1 = 0 \tag{α}$$

$$\mathrm{m}\Theta_0 + \mathrm{d}\Theta_2 + \mathrm{d^a}\Theta_1 = 0 \tag{β}$$

$$\mathrm{d}\Theta_0 + \mathrm{m}\Theta_1 = 0 \tag{γ}$$

$$\mathrm{d^a}\Theta_0 + \mathrm{m}\Theta_2 = 0 \tag{δ}$$

führt. Wir sehen zunächst, daß die Gleichungen (α) aus (γ) und (δ) folgen, so daß sie mit (β), (γ), (δ) von selbst erfüllt sind. Eliminiert man Θ_1 und Θ_2 aus (β) mit Hilfe von (γ) und (δ), so erhält man

$$\square\,\Theta_0 - \mathrm{m}^2\Theta_0 = 0\,. \tag{x}$$

Eliminiert man weiter mittels (γ) und (δ) Θ_1 und Θ_2 aus (29), so entsteht

$$\Theta(\mu) = \left(1 - \frac{\mu}{\mathrm{m}}\,\mathrm{d} - \frac{\mu^{-1}}{\mathrm{m}}\,\mathrm{d^a}\right)\Theta_0$$

bzw.

$$\Theta(\mu) = -\frac{1}{\mathrm{m}}\,(\mu \mathrm{d} + \mu^{-1}\mathrm{d^a} - \mathrm{m})\,\Theta_0. \tag{xx}$$

(x) und (xx) sind also notwendig, damit (29) Lösung von (26) ist. Wegen

$$\begin{aligned}(\mu \mathrm{d} + \mu^{-1}\mathrm{d^a} + \mathrm{m})\,(\mu \mathrm{d} + \mu^{-1}\mathrm{d^a} - \mathrm{m})\,\Theta_0 \\ = (\square - \mathrm{m}^2)\,\Theta_0 = 0\end{aligned}$$

sind diese Bedingungen auch hinreichend. Also: Alle Lösungen von (26), die die Gestalt (29) besitzen, sind durch

$$\Theta(\mu) = (\mu \mathrm{d} + \mu^{-1}\mathrm{d^a} - \mathrm{m})\,\Theta_0\,, \quad (\square - \mathrm{m}^2)\,\Theta_0 = 0 \tag{30}$$

gegeben. Dieses Ergebnis gilt nur für $\mathrm{m} \neq 0$. Für $\mathrm{m} = 0$ ist die Lösungsmannigfaltigkeit (29) von (26) erheblich komplizierter. Zum Beispiel gibt es zusätzliche Lösungen von (26), der Form (29) mit

$$\Theta_0 = 0\,, \quad \mathrm{d^a}\Theta_2 = \mathrm{d}\Theta_1 = 0\,, \quad \mathrm{d}\Theta_2 + \mathrm{d^a}\Theta_1 = 0\,.$$

Literaturverzeichnis

[1] Bidal, P., und G. de Rham, Comm. Math. Helvet. *19*, 1 (1949).

[2] Bateman, H., Proc. Lond. Math. Soc. *8*, 223 (1910).

[3] Cunnigham, E., Proc. Lond. Math. Soc. *8*, 27 (1910).

[4] Infeld, L., und A. Schild, Phys. Rev. *68*, 250 (1945).

[5] Iwanenko, D., und A. Sokolow, Klassische Feldtheorie, Berlin 1953. Ein entsprechender Hinweis befindet sich auf S. 90.

[6] Jordan, P., Schwerkraft und Weltall, Braunschweig 1955. Bemerkung auf S. 169.

[7] Kähler, E., Abh. Math. Sem. Hamburg *12*, 1 (1938).

[8] Uhlmann, A., Wiss. Ztschr. d. Friedrich-Schiller-Universität Jena *7* (1957/8), H. 6.