

Als Manuskript gedruckt

Aus dem Theoretisch-Physikalischen Institut. Direktor: Prof. Dr. K. Schuster.

# Gemischte Differentiale und die Theorie von HODGE auf nicht notwendig orientierbaren Mannigfaltigkeiten

Von  
 ARMIN UHLMANN

## 1. Gemischte Differentiale.

Es sei  $M$  eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Klasse  $C^\infty$  und der Dimension  $n$ .

Kleine griechische Buchstaben  $\alpha, \beta, \dots$  bezeichnen alternierende Differentiale.

Definition:

Wird jedem Koordinatensystem  $\{x^1, \dots, x^n\} = \{x^i\}$  ein Paar  $(\alpha_1, \alpha_2)$  von Differentialen zugeordnet, die auf dem Gültigkeitsbereich des Koordinatensystems erklärt sind, so sprechen wir genau dann von einem „gemischten Differential“, wenn gilt:

Ist  $\{y^i\}$  ein zweites Koordinatensystem, dem das Paar  $(\beta_1, \beta_2)$  zugeordnet ist, so gilt auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche von  $\{x^i\}$  und  $\{y^i\}$

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2 \text{ falls } \frac{\partial (x^1, \dots, x^n)}{\partial (y^1, \dots, y^n)} > 0 \\ \alpha_1 = \beta_2, \alpha_2 = \beta_1 \text{ falls } \frac{\partial (x^1, \dots, x^n)}{\partial (y^1, \dots, y^n)} < 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ist.

Wegen

$$\frac{\partial (x^1, \dots, x^n)}{\partial (y^1, \dots, y^n)} \frac{\partial (y^1, \dots, y^n)}{\partial (z^1, \dots, z^n)} = \frac{\partial (x^1, \dots, x^n)}{\partial (z^1, \dots, z^n)}$$

ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \{x^i\} & \\ & | & \\ & (\alpha_1, \alpha_2) & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{y^i\} - (\beta_1, \beta_2) & \longrightarrow & (\gamma_1, \gamma_2) - \{z^i\} \end{array}$$

wobei  $\{z^i\}$  ein drittes Koordinatensystem ist, „kommutativ“ bezüglich des in der Definition genannten Gleichheitsbegriffes und deshalb ist die Definition widerspruchsfrei.

Gemischte Differentiale (im Folgenden einfach „g-Differentiale“ genannt) werden wir mit großen griechischen Buchstaben kennzeichnen.

Sind  $\Theta', \Theta''$  zwei g-Differentiale, so definieren wir ihre Summe bzw. Differenz „komponentenweise“ durch

$$(\Theta' \pm \Theta'') \{x^i\} = (\alpha_1' \pm \alpha_1'', \alpha_2' \pm \alpha_2'')$$

falls

$$\Theta' \{x^i\} = (\alpha_1', \alpha_2'), \Theta'' \{x^i\} = (\alpha_2', \alpha_1'')$$

ist. Die g-Differentiale bilden daher einen Modul. Ist  $\vartheta$  ein Differential,  $\Theta$  ein g-Differential, so sei

$$(\vartheta \wedge \Theta) \{x^i\} = (\vartheta \wedge \alpha_1, \vartheta \wedge \alpha_2) \text{ falls } \Theta \{x^i\} = (\alpha_1, \alpha_2).$$

Hierdurch wird die Gesamtheit der g-Differentiale zu einem Operatormodul mit dem Schieftring der alternierenden Differentiale als Operatorring.

## 2. Die Orientierungskonjugation

Wir definieren einen Operator  $C$ , der auf g-Differentiale wirkt und Orientierungskonjugation genannt werde, durch

$$C \Theta \{x^i\} = (\alpha_2, \alpha_1) \text{ falls } \Theta \{x^i\} = (\alpha_1, \alpha_2) \quad (2)$$

ist.

Unmittelbar nachzuprüfen sind die folgenden Eigenschaften:

$$C(\Theta' + \Theta'') = C\Theta' + C\Theta'', \quad C(\vartheta \wedge \Theta) = \vartheta \wedge C\Theta \quad (2a)$$

$$C^2\Theta = \Theta \quad \text{d. h.} \quad C^2 = 1 \quad (2b)$$

Aus (2b) folgt

$$(1 + C)(1 - C) = 0$$

$$\frac{1}{2}(C + 1)^2 = C + 1, \quad \frac{1}{2}(C - 1)^2 = 1 - C$$

$$C(1 + C) = 1 + C, \quad C(1 - C) = -(1 - C)$$

und deshalb veranlaßt  $C$  die Aufspaltung des Moduls der g-Differentiale in eine direkte Summe:

Jedes g-Differential  $\Theta$  besitzt genau eine Zerlegung

$$\Theta = \Theta_s + \Theta_p \quad (3a)$$

mit

$$C\Theta_s = \Theta_s, \quad C\Theta_p = -\Theta_p \quad (3b)$$

und es ist

$$\Theta_s = \frac{1}{2}(1 + C)\Theta, \quad \Theta_p = \frac{1}{2}(1 - C)\Theta. \quad (3c)$$

Wir nennen ein g-Differential  $\Theta$  *skalar*, wenn  $C\Theta = \Theta$  und *pseudoskalar*, wenn  $C\Theta = -\Theta$  ist.

Jedes g-Differential läßt sich somit eindeutig zerlegen in die Summe zweier g-Differentiale, wobei das eine skalar (s-Differential), das andere aber pseudoskalar (ps-Differential) ist.

Es existiert eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Differentialen und den s-Differentialen

$$\vartheta \longleftrightarrow \Theta, \quad C\Theta = \Theta \quad (4a)$$

die durch

$$\Theta \{x_i\} = (\vartheta, \vartheta) \text{ für alle } \{x^i\} \quad (4b)$$

vermittelt wird.

## 3. Der Dualitätsoperator

Im Falle orientierbarer Mannigfaltigkeiten gehört zu jedem nichtausgearteten, symmetrischen kovarianten Tensor  $g_{ik}$  ein bis aufs Vorzeichen bestimmter Dualitätsoperator [1, 2, 4]. Für nicht orientierbare

Mannigfaltigkeiten läßt sich jedoch zwischen den Differentialen (bzw. schiefssymmetrischen Tensoren) keine Dualität erklären. Dieses Hindernis läßt sich durch Heranziehen der allgemeineren g-Differentiale überwinden.

Im Hinblick auf seine Linearität langt es, den Dualitätsoperator für g-Differentiale

$$\Theta \{x^i\} = (\vartheta, \vartheta^*)$$

zu erklären, bei denen  $\vartheta$  und  $\vartheta^*$  gleichgradige Differentialformen sind:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{1}{r!} A_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}, \\ \vartheta^* &= \frac{1}{r!} A_{i_1 \dots i_r}^* dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \end{aligned} \quad (5a)$$

(Von der Summationskonvention wird Gebrauch gemacht.)

Liegt jetzt die (nicht notwendig definite) Metrik  $g_{ik} dx^i \cdot dx^k$ ,  $g = \text{Det. } (g_{ik}) \neq 0$  (5b)

vor, so erklären wir in Analogie zur üblichen Definition (siehe z. B. [1], [4]. Die Wahl des vom Grad abhängenden Vorzeichens lernte ich bei Herrn Prof. Dr. E. Kähler.)

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{(-1)^{\binom{2}{2}}}{r!(n-r)!} A_{i_1 \dots i_r} g^{i_1 k_1} \dots g^{i_r k_r} dx^{k_1+1} \wedge \dots \wedge dx^{k_n} \delta_{k_1 \dots k_n}^{1 \dots n} |g|^{\frac{1}{2}}, \\ \vartheta_1^* &= -\frac{(-1)^{\binom{2}{2}}}{r!(n-r)!} A_{i_1 \dots i_r}^* g^{i_1 k_1} \dots g^{i_r k_r} dx^{k_1+1} \wedge \dots \wedge dx^{k_n} \delta_{k_1 \dots k_n}^{1 \dots n} |g|^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5c)$$

wobei  $|g|^{\frac{1}{2}}$  die positiv genommene Wurzel des Absolutbetrages der Determinante  $g$  ist, und setzen

$$a \Theta \{x^i\} = (\vartheta_1, \vartheta_1^*). \quad (5d)$$

Beim Übergang zu einem anderen Koordinatensystem ändert sich höchstens das Vorzeichen der Zuordnung  $\vartheta \rightarrow \vartheta_1$  bzw.  $\vartheta^* \rightarrow \vartheta_1^*$ . Dieser Fall tritt wegen

$$\sqrt{g'} = \sqrt{g} \frac{\partial (x^1, \dots, x^n)}{\partial (y^1, \dots, y^n)}$$

genau dann auf, wenn die Funktionaldeterminante zwischen den Koordinatensystemen negativ ist. Dieser Vorzeichenwechsel ist aber wegen (1) gerade erforderlich, um die völlige Invarianz des Operators  $a$  zu garantieren.

Da die Vorschrift zur Bildung von  $\vartheta_1$  gerade um das Vorzeichen von der Vorschrift zur Bildung von  $\vartheta_1^*$  verschieden ist, gilt

$$Ca + aC = 0 \quad (6)$$

Wenn die mit der Metrik (5b) oskulierenden Metriken die Gestalt

$$\sum \varepsilon_k (dy^k)^2, \quad \varepsilon_k = \pm 1 \quad (7a)$$

besitzen, folgt auf dem üblichen Wege [2] durch Ausrechnen

$$a^2 = (-1)^{\binom{n}{2}} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \dots \cdot \varepsilon_n. \quad (7b)$$

Liegt der Fall  $a^2 = -1$  vor, so ist die Gesamtheit der Operatoren  $\lambda_1 + \lambda_2 a$  mit reellem  $\lambda_k$  dem Körper der komplexen Zahlen vollständig isomorph und den Übergang zum „Konjugiert-Komplexen“ in diesem Körper erledigt die Orientierungskonjugation.

Wir bemerken, daß dieser Fall sowohl für eine positiv definite Metrik im 3-dimensionalen Raum als auch für die Metrik der Relativitätstheorie im 4-dimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum gilt.

#### 4. Über orientierbare Mannigfaltigkeiten

Eine Mannigfaltigkeit heißt orientierbar [2], [4], wenn die Gesamtheit der (differenzierbaren) Koordinatensysteme in zwei Klassen zerfällt und der Übergang zwischen Koordinatensystemen der gleichen Klasse mit positiven, der Übergang zwischen verschiedenen Klassen aber mit negativer Funktionaldeterminante geschieht.

Kodaira und de Rham [4] haben bemerkt, daß eine Mannigfaltigkeit genau dann orientierbar ist, wenn es einen von Null verschiedenen „konstanten Pseudoskalar“ gibt. Hierunter wird ein einkomponentiges Gebilde verstanden, der in der einen Klasse  $\gamma'$  von Koordinatensystemen der Wert (z. B.) 1, in der anderen Klasse  $\gamma''$  jedoch der Wert  $-1$  zugeordnet ist. Diesem Gebilde entspricht in der hier gebrauchten Terminologie die Zuordnung

$$\begin{aligned} \Theta \{x^i\} &= (1, -1) \quad \text{für } \{x^i\} \in \gamma', \\ \Theta \{y^i\} &= (-1, 1) \quad \text{für } \{y^i\} \in \gamma''. \end{aligned}$$

Ist  $M$  orientierbar, so führen wir einen Operator  $o$  wie folgt ein:

$$\begin{aligned} \text{Ist } \Theta \text{ ein } g\text{-Differential mit } \Theta \{x^i\} &= (\alpha, \beta), \text{ so sei} \\ o \Theta \{x^i\} &= (\beta, -\alpha) \text{ falls } \{x^i\} \in \gamma', \\ &= (-\beta, \alpha) \text{ falls } \{x^i\} \in \gamma''. \end{aligned} \quad (8)$$

(Diese Definition zeichnet eine Klasse  $\gamma'$  vor der anderen aus und beinhaltet somit eine Orientierungsvorschrift.)

Das folgende Diagramm zeigt die Konsistenz obiger Definition.

$$\begin{array}{c} \gamma' \ni \{x^i\} \rightarrow (\alpha, \beta) \rightarrow (\beta, -\alpha) \\ \updownarrow \\ \gamma'' \ni \{y^i\} \rightarrow (\beta, \alpha) \rightarrow (-\alpha, \beta) \end{array}$$

Folgende Formeln ergeben sich unmittelbar aus der Definition:

$$o^2 = -1 \quad (a)$$

$$oa = -ao, Co + oC = o \quad (b) \quad (9)$$

$$(ao)^2 = a^2 \quad (c)$$

Wir wollen hier wieder den Fall  $a^2 = -1$  besonders hervorheben: Auf Grund der angegebenen Regeln ist dann das System der Operatoren

$$\lambda_1 + \lambda_2 a + \lambda_3 o + \lambda_4 ao$$

mit reellen  $\lambda_k$  vollständig isomorph dem Körper der Quaternionen. Doch veranlaßt hier die Orientierungskonjugation die Quaternionenkonjugation nicht; denn

$$Cao = aoC. \quad (9d)$$

Durch  $C$  werden vielmehr die Erzeugenden  $a$  und  $o$  ausgezeichnet.

Wir bemerken, daß auf Grund von (9d) s-Differentiale wieder in s-Differentiale übergehen: Auf Grund der Identifizierung (4) hat man  $ao$  als den in der Theorie der orientierbaren Räume üblichen Dualitätsoperator anzusehen.

#### 5. Die Multiplikation

Verbleiben wir für einen Augenblick bei orientierbaren Mannigfaltigkeiten. Wird die s-Funktion, die in jedem Koordinatensystem die Darstellung (1,1) besitzt (und somit gemäß (4) der konstanten Funktion 1 entspricht) einfach mit 1 bezeichnet, so ergibt sich der Pseudoskalar von de Rham und Kodaira als  $o1$ . Ist  $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2'$  mit skalarem  $\Theta_1$  und pseudoskalarem  $\Theta_2$ , so ist  $-o\Theta_1' = \Theta_2$  skalar und deshalb existiert zu jedem  $\Theta$  genau eine Darstellung

$$\Theta = \Theta_1 + o\Theta_2 \quad (10a)$$

Korrespondieren zu diesen beiden s-Differentiale gemäß (4) die Differentiale  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$ , und ist  $\Theta^*$  ein zweites beliebiges g-Differential, so ist die Bedeutung von

$$(\vartheta_1 + o\vartheta_2) \wedge \Theta^* = \vartheta_1 \wedge \Theta^* + o(\vartheta_2 \wedge \Theta^*) \quad (10b)$$

klar. Wir setzen dann

$$\Theta \wedge \Theta^* = (\vartheta_1 + o\vartheta_2) \wedge \Theta^* \quad (10c)$$

Da

$$\vartheta \wedge (o\Theta^*) = o(\vartheta \wedge \Theta^*) \quad (+)$$

gilt, kann die Multiplikation im Bereich der g-Differentiale wie folgt charakterisiert werden:

1. Sind  $\Theta_1, \Theta_2$  s-Differentiale, denen gemäß (4) die Differentiale  $\vartheta_1, \vartheta_2$  zugeordnet sind, so korrespondiert  $\Theta_1 \wedge \Theta_2$  mit  $\vartheta_1 \wedge \vartheta_2$ .

$$\Theta_k \leftrightarrow \vartheta_k, \Theta_1 \wedge \Theta_2 \leftrightarrow \vartheta_1 \wedge \vartheta_2$$

2. Jedes g-Differential hat die Form

$$\Theta = \Theta_1 + o\Theta_2 \quad (11a)$$

mit skalarem  $\Theta_k$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} & (\Theta_1 + o\Theta_2) \wedge (\Theta_1^* + o\Theta_2^*) \\ &= \Theta_1 \wedge \Theta_1^* + o^2\Theta_2 \wedge \Theta_2^* + o(\Theta_1 \wedge \Theta_2^* + \Theta_1^* \wedge \Theta_2) \\ &= \Theta_1 \wedge \Theta_1^* - \Theta_2 \wedge \Theta_2^* + o(\Theta_1 \wedge \Theta_2^* + \Theta_2 \wedge \Theta_1^*) \end{aligned} \quad (11b)$$

Aus diesem Bildungsgesetz folgt, daß die entstehende Algebra der g-Differentiale assoziativ und distributiv ist; denn sie kann aus der Algebra der Differentiale wegen (+) durch „Adjunktion eines Elements  $o$ “ mit  $o^2 = -1$  gewonnen werden. Wir bemerken die wichtige Regel

$$o(\Theta \wedge \Theta') = o\Theta \wedge \Theta' = \Theta \wedge o\Theta' \quad (12)$$

Der Übergang zu einer beliebigen, nicht notwendig orientierbaren Mannigfaltigkeit ist nunmehr leicht.

Aus der Definition folgt nämlich unmittelbar, daß die Definition der Multiplikation invariant gegenüber der „Substitution“

$$o \rightarrow -o, \Theta_2 \rightarrow -\Theta_2, \Theta_2^* \rightarrow -\Theta_2^*$$

ist. Diese ist so beschaffen, daß die Willkür im Vorzeichen von  $o$  berücksichtigt, gleichzeitig aber die g-Differentiale ungeändert gelassen werden. (Nur die Art der Zerlegung (10a) wird geändert.)

Nun denken wir uns die Mannigfaltigkeit durch ein System orientierbarer Umgebungen  $U_k$  überdeckt

und wählen zu jeder solchen Umgebung einen Operator  $o_k$ . Haben dann zwei solcher Umgebungen einen nicht leeren Durchschnitt  $U_k \cap U_l$ , so gilt dort  $o_k = \pm o_l$ . Betrachten wir deshalb zwei g-Differentiale  $\Theta$  und  $\Theta'$  und ihre Beschränkungen  $\Theta_{(k)}, \Theta'_{(k)}$  auf die Umgebungen  $U_k$ , so ist  $\Theta_{(k)} \wedge \Theta'_{(k)}$  erklärt und

$$\Theta_{(k)} \wedge \Theta'_{(k)} = \Theta_{(l)} \wedge \Theta'_{(l)} \text{ auf } U_k \cap U_l.$$

Folglich wird man als  $\Theta \wedge \Theta'$  dasjenige g-Differential zu betrachten haben, für das

$$(\Theta \wedge \Theta')_{(k)} = \Theta_{(k)} \wedge \Theta'_{(k)} \text{ auf } U_k$$

gilt.

Durch obige Betrachtungen wird der lokale Charakter der Multiplikation klar. Dieser Umstand versetzt uns in die Lage, einige lokale Eigenschaften von g-Differentiale aus der Betrachtung orientierbarer Teilmannigfaltigkeiten herzuleiten. So folgt aus (9b) und (11b) die Formel

$$C(\Theta \wedge \Theta') = C\Theta \wedge C\Theta', \quad (13)$$

die zeigt, daß C ein Automorphismus des Schieferringes der g-Differentiale ist.

#### 6. Die Integration

Ist  $\vartheta$  eine n-Form auf einer n-dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit M, so ist bis aufs Vorzeichen klar, was man unter

$$\int_M \vartheta \quad (++)$$

zu verstehen hat [2]. Diese Cartansche invariante Integration ist invariant bezüglich eines orientierten orientierbaren Raumes. Die Voraussetzung einer bestimmten Orientierung erscheint jedoch in vielerlei Hinsicht, nicht zuletzt in der Anwendung auf physikalische Probleme, höchst willkürlich, da sie ja eine Klasse von Koordinatensystemen vor der anderen als „positiv“ auszeichnet. Auf der anderen Seite existiert kein Integral (++), wenn M nicht orientierbar ist.

Kodaira und de Rham haben jedoch bemerkt [4], daß auf einer solchen Mannigfaltigkeit das Integral einer pseudoskalaren n-Form existiert.

Wir wollen dieses Integral kurz erklären und den auch für orientierbare Mannigfaltigkeiten prinzipiell wichtigen Umstand hervorheben, daß sein Wert orientierungsunabhängig und somit im vollsten Sinne invariant ist.

Sei  $\Theta$  ein ps-Differential vom Grade n und M eine Mannigfaltigkeit dieser Dimension. Wegen der Existenz von „Zerlegungen der Eins“ können wir annehmen, der Träger von  $\Theta$  liege ganz im orientierbaren Bereich G eines Koordinatensystems  $x^1, \dots, x^n$ . Ist dann

$$\Theta \{x^n\} = (\vartheta, -\vartheta)$$

so erklären wir

$$\int_M \Theta = \int_G \Theta = \int_G \vartheta$$

und legen das Vorzeichen von  $\int \vartheta$  wie folgt fest: Ist  $\vartheta = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ , so ist

$$\int_G \vartheta \geq 0 \text{ falls } f \geq 0.$$

Damit diese Definition einwandfrei ist, muß gelten:  
Ist

$$\Theta \{x^i\} = (\vartheta, -\vartheta), \Theta \{y^i\} = (\vartheta', -\vartheta')$$

$$\vartheta = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \vartheta' = f' dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n,$$

so ist  $f \geq 0$  dann und nur dann, wenn  $f' \geq 0$  ist. Dies wird aber gerade dadurch, daß

$$\vartheta = \vartheta' \text{ für } \frac{\partial (x^1 \dots x^n)}{\partial (y^1 \dots y^n)} > 0,$$

$$\vartheta = -\vartheta' \text{ für } \frac{\partial (x^1 \dots x^n)}{\partial (y^1 \dots y^n)} < 0$$

ist, gewährleistet.

Somit ist nun das Integral über ein pseudoskalaras Differential vom Grade  $n$  als wirkliche Invariante erwiesen. Es besitzt die „normierende“ Eigenschaft positiv zu sein, wenn

$\Theta \{x^i\} = (\vartheta, -\vartheta)$  und  $\vartheta = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  mit positiven  $f$  ist.

Der Zusammenhang mit der üblichen Definition auf orientierbaren Mannigfaltigkeiten besteht darin, daß  $o\Theta$  skalar ist, wenn  $\Theta$  pseudoskalar war. Die Abhängigkeit von der Orientierung kommt dadurch zum Ausdruck, daß  $o$  und  $-o$  gleichberechtigt sind.

Für ein beliebiges  $g$ -Differential  $\Theta$  definieren wir das totale Differential „komponentenweise“:

$$d\Theta \{x^i\} = (d\vartheta_1, d\vartheta_2) \text{ falls } \Theta \{x^i\} = (\vartheta_1, \vartheta_2) \text{ ist.}$$

Ist  $M$  geschlossen und ist  $\Theta$  ein ps-Differential vom Grade  $n-1$ , so ist

$$\int_M d\Theta = 0. \quad (14)$$

Wegen der Existenz von Zerlegungen der Eins langt es, (14) für den Fall nachzuweisen, daß der Träger von  $\Theta$  ganz im Gültigkeitsbereich eines Koordinatensystems  $x^1, \dots, x^n$  liegt. Auf Grund der Definition des Integrals ist dieser Fall aber ein Spezialfall des Satzes von Stokes [2].

### 7. Das Skalarprodukt

Sind  $\Theta, \Theta'$  zwei  $g$ -Differentialie vom Grade  $r$ , so gilt

$$C[\Theta a\Theta' + \Theta'a\Theta] = -[\Theta a\Theta' + \Theta'a\Theta] \quad (15)$$

Der Beweis erfolgt lokal.  $U$  sei eine orientierbare Umgebung eines beliebigen Punktes von  $M$ . Wir beschränken  $\Theta$  und  $\Theta'$  auf diese Umgebung und bilden die Operation  $o$ . Dann ist

$$\Theta = \Theta_1 + o\Theta_2, \Theta' = \Theta'_1 + o\Theta'_2$$

mit skalarem  $\Theta_k, \Theta'_k$ . Wir erhalten hiermit

$$\Theta a\Theta' = \Theta_1 a\Theta'_1 + o\Theta_2 a o\Theta'_2 + o\Theta_2 a\Theta'_1 + \Theta_1 a o\Theta'_2$$

Aus (12) und der Relation  $o a o = a$  folgt

$$\Theta a\Theta' = \Theta_1 a\Theta'_1 + \Theta_2 a\Theta'_2 + o(\Theta_2 a\Theta'_1 - \Theta_1 a\Theta'_2).$$

Nun bemerken wir, daß

$$\Theta_1 a\Theta'_2 = \Theta'_2 a\Theta_1 \text{ usw.}$$

ist; denn  $ao$  ist der übliche Dualitätsoperator zwischen Differentialen (d. h. also  $s$ -Differentialen) und die gewünschte Relation folgt wegen (12) sofort aus

$$\Theta_1 a o\Theta'_2 = \Theta'_2 a o\Theta_1.$$

Es folgt, daß (lokal)

$$\frac{1}{2}[\Theta a\Theta' + \Theta'a\Theta] = \Theta_1 a\Theta'_1 + \Theta_2 a\Theta'_2$$

$$\frac{1}{2}[\Theta a\Theta' - \Theta'a\Theta] = o[\Theta_2 a\Theta'_1 - \Theta_1 a\Theta'_2]$$

ist. Aus diesen Formeln folgt (15); denn es ist z. B.  $\Theta_1$  und  $\Theta'_2$  Skalar und deshalb  $\Theta_1 a\Theta'_2$  nach (6) und (15) Pseudoskalar.

Betrachten wir nun z. B.  $\Theta_1 a\Theta'_1$ . Sei

$\Theta_1 = (\vartheta, \vartheta), \Theta'_1 = (\vartheta', \vartheta'), a\Theta'_1 \{x^i\} = (\vartheta^*, -\vartheta^*)$ .

Dann ist

$$\Theta_1 a\Theta'_1 \{x^i\} = (\vartheta \wedge \vartheta^*, -\vartheta \wedge \vartheta^*).$$

Ist

$$\Theta_1 = \frac{1}{r!} A_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r},$$

$$\Theta'_1 = \frac{1}{r!} A'_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

$$\vartheta \wedge \vartheta^* = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

so errechnet sich  $f$  zu

$$f = (-1)^{\binom{r}{2}} \frac{1}{r!} A_{i_1 \dots i_r} A'_{k_1 \dots k_r} g^{i_1 k_1} \dots g^{i_r k_r} |g|^{\frac{1}{2}}$$

mit positiv genommener Wurzel  $|g|^{\frac{1}{2}}$ .

Wir sehen hieraus, wenn wir uns auf reelle  $g$ -Differentialie und positiv-definite Metrik beschränken:

Ist  $\Theta$  ein beliebiges  $g$ -Differential vom Grade  $r$  und

$$\Theta a\Theta \{x^i\} = (f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, -f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n), \quad (16a)$$

so ist stets

$$(-1)^{\binom{r}{2}} f \geq 0. \quad (16b)$$

Im eben genannten Fall ist also

$$\langle \Theta, \Theta' \rangle = (-1)^{\binom{r}{2}} \int_M [\Theta a\Theta' + \Theta'a\Theta] \quad (17)$$

ein positiv definites Skalarprodukt.

### 8. Greensche Formeln

Von nun an sei  $M$  kompakt und die Metrik positiv definit. Sind  $\Theta_{r-1}, \Theta_r$  zwei  $g$ -Differentialie vom Grade  $r-1$  bzw.  $r$ , so gilt

$$\langle d\Theta_{r-1}, \Theta_r \rangle + \langle \Theta_{r-1}, d^a\Theta_r \rangle = 0, \quad (18)$$

falls mit einer von Kähler eingeführten Bezeichnungweise

$$d^a = a^{-1} da$$

gesetzt wird.

Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß es wegen der Bilinearität des Skalarproduktes und wegen der Existenz von Zerlegungen der Eins langt, die Träger von  $\Theta_r$  und  $\Theta_{r-1}$  als ganz in einem orientierbaren Gebiet  $G$  gelegen anzusehen. Wir führen dann auf  $G$  den Operator  $o$  ein und betrachten die Zerlegung

$$\Theta_{r-1} = \Theta'_{r-1} + o\Theta''_{r-1}, \Theta_r = \Theta'_r + o\Theta''_r$$

in skalare Differentialie. Nach den Ergebnissen von Nr. 7 sagt (19) aus, daß das Integral über

$$\Theta^* = (-1)^{\binom{r}{2}} [d\Theta'_{r-1} \wedge a\Theta'_r + d\Theta_{r-1} \wedge a\Theta''_r]$$

$$+ (-1)^{\binom{r-1}{2}} [\Theta'_{r-1} a d^a \Theta'_r + \Theta''_{r-1} a d^a \Theta''_r]$$

verschwindet. Wegen

$$(-1)^{\binom{r}{2}} = (-1)^{r-1 + \binom{r-1}{2}}$$

ist aber

$$\Theta^* = (-1)^{\binom{r}{2}} d[\Theta'_{r-1} a\Theta'_r + \Theta''_{r-1} a\Theta''_r]$$

wobei der Klammerausdruck ein ps-Differential vom Grade  $n-1$  ist. Nach (14) ist aber

$$\int_M \Theta^* = 0$$

und somit (18) bestätigt.

Durch

$$\Delta = d d^a + d^a d$$

ist der Laplace-Beltrami-de Rham-Operator definiert. Durch bloßes Ausrechnen mit Hilfe von Formel (18) erhält man wie in [1] die Formeln von Green

$$\langle d\Theta, d\Theta' \rangle + \langle d^a\Theta, d^a\Theta' \rangle + \langle \Delta\Theta, \Theta' \rangle = 0, \quad (19a)$$

$$\langle \Theta, \Delta\Theta' \rangle = \langle \Delta\Theta, \Theta' \rangle. \quad (19b)$$

Die in der Theorie der harmonischen Formen üblichen Orthogonalitätsrelationen [1], [4] sind also erfüllt.

#### 9. Harmonische $g$ -Differentialiale

Betrachten wir  $\Delta$  in einer orientierbaren Teilmannigfaltigkeit  $M_0$  von  $M$ . Da  $a o$  dann der übliche Dualitätsoperator ist, zeigt die wegen  $d o = o d$  gültige Beziehung

$$(a o)^{-1} d (a o) = a^{-1} d a$$

Folgendes: Ist  $\Delta_0$  der de Rham-Operator auf  $M_0$  und ist  $\Theta \{x^i\} = (\vartheta_1, \vartheta_2)$  in einem Gebiet von  $M_0$ , so ist

$$\Delta \Theta \{x^i\} = (\Delta_0 \vartheta_1, \Delta_0 \vartheta_2).$$

Nach den Untersuchungen von Kodaira [3] können wir deshalb und wegen der Gültigkeit der Greenschen Formeln auf die Gültigkeit des Zerlegungssatzes von de Rham [1] schließen: Jedes  $g$ -Differential  $\Theta$  besitzt genau eine Zerlegung

$$\Theta = \Delta \Theta_0 + \Theta_H$$

mit harmonischem  $\Theta_H$  ( $\Delta\Theta_H = 0$ ). Wir sehen aus (19a), daß

$$\Delta \Theta_H = 0 \leftrightarrow d\Theta_H = d^a\Theta_H = 0$$

ist.

Sei  $B_r$  die Anzahl der linear unabhängigen harmonischen  $g$ -Differentialiale von Grade  $r$  und  $\Theta_r$  eine solche Form. Wegen

$$C \Delta = \Delta C \quad (20)$$

sind dann auch die  $g$ -Differentialiale

$$\frac{1}{2} (I + C) \Theta_r, \quad \frac{1}{2} (I - C) \Theta_r$$

harmonisch.

Ist deshalb  $B_r'$  die Anzahl der linear unabhängigen skalaren Differentialiale vom Grade  $r$  und  $B_r''$  die entsprechende Anzahl für die pseudoskalaren harmonischen Differentialiale, so gilt

$$B_r = B_r' + B_r''. \quad (21)$$

Nun beachten wir, daß wegen

$$a \Delta = \Delta a \quad (22)$$

mit  $\Theta$  auch  $a\Theta$  harmonisch ist. Hieraus folgt, da  $a$  skalare Differentialiale in pseudoskalare überführt und umgekehrt,

$$B_r' = B''_{n-r} \quad (23)$$

Dies ist eine gewisse Verallgemeinerung des Dualitätssatzes von Poincaré; denn ist  $M$  orientierbar, so existiert der Operator  $o$  mit

$$\Delta o = o \Delta$$

und es ist in diesem Fall

$$B_r' = B_r'' \quad (M \text{ orientierbar})$$

und diese Zahl ist nach Hodge [2] gerade die  $r$ -te Bettische Zahl von  $M$ .

Man wird vermuten, daß die Zahlen  $B_r'$  und  $B_r''$  auf nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten eine ebenso einfache Bedeutung besitzen werden. Schließlich könnte man die Operation  $a$  als Spezialfall eines allgemeinen Serre-Isomorphismus [5] auf nicht notwendig orientierbaren Mannigfaltigkeiten betrachten.

#### Literaturverzeichnis

- [1] Bidal, P. und de Rham, G., Les formes différentielles harmoniques. *Comm. Math. Helvet.* 19, 1—49 (1949).
- [2] Hodge, W. V. D., *The theory and applications of harmonic integrals.* Cambridge 1952.
- [3] Kodaira, K., Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory) *Ann. of Math.* 50, 587—665 (1949)  
— On cohomology groups of compact analytic varieties with coefficients in some analytic faisceaux. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 39, 864—868 (1953).
- [4] — und Rham, de G., *Harmonic integrals.* Princeton, New Jersey 1950.
- [5] Serre, J. P., Un théorème de dualité. *Comm. Math. Helvet.* 29, 9—26 (1955).

(Eingegangen: 5. November 1958)