

Raum-Zeit und Quantenphysik

Armin Uhlmann

Ein Geburtstagsständchen für Hans-Jürgen Treder

Gefragt nach einem Vortrag für Hans-Jürgen Treders 75. Geburtstag, hatte ich kurz entschlossen geantwortet, etwas zum Verhältnis von Relativitätstheorie und Quantentheorie sagen zu wollen. Das war etwas leichtsinnig; denn nur ein paar Beobachtungen habe ich anzubieten, Lösungen nicht.

Die großen physikalischen Theorien des 20-ten Jahrhunderts, die wir zurecht bewundern, überdecken und beherrschen weite Teile der Physik. Doch nicht in allen arbeiten sie gleich gut. In manchen finden wir sie perfekt. In anderen meint man, ein leichtes Klappern der Maschinerie heraushören zu können. Es liegt eine Spannung zwischen Geometrie und dynamischen Größen wie Energie und Impuls. Wir finden sie in der Fortschreibung der Teilung in Kinematik und Dynamik, die wir von der Klassischen Mechanik kennen. Kinematik ist die geometrische Analyse der mechanischen Bewegung, Dynamik fragt nach ihrer Verursachung.

Es war ein 2000 Jahre währendes Geheimnis, dass die Euklidische Geometrie nicht die allein denkbare ist. Dann aber brauchte es keine hundert Jahre, um auch der Zeit die Starre des Absoluten zu nehmen. Und kaum hatte Albert Einstein in seiner Speziellen Relativitätstheorie Raum und Zeit zu einem universellen Block vereinigt und Minkowski ihn geometrisch analysiert, so zeigte er mit der Allgemeinen Relativitätstheorie dessen Veränderbarkeit und Bedingtheit.

Bald darauf entdeckten Werner Heisenberg und Erwin Schrödinger eine geschlossene, in sich stimmige Form der Quantenphysik. Max Born erkannte die zufällige Natur beobachtbarer Quantenprozesse. Danach ist die Antwort eines Quantensystem auf einen definierten Eingriff nur bedingt determiniert: Welche Reaktionen mit welcher Wahrscheinlichkeit erlaubt sind, ist vom Systemzustand abzulesen. Welche der erlaubten Reaktionen jedoch im Einzelprozess erfolgt, ist Zufall.

1 Raum-Zeit und Geometrie

Der Relativitätstheorie liegt die Mannigfaltigkeit der Raum-Zeit-Punkte, die auch "Welt-Punkte" genannt werden, zugrunde. Ihre metrischen Bindungen sind ihr vornehmster Forschungsgegenstand. In ihnen, im metrischen Tensor, ist die Geometrie von Raum und Zeit kodiert.

Paare von Welpunkten können, zumindest in nicht zu großen Gebieten, in Klassen eingeteilt werden: Entweder A ist vor B, oder B ist vor A, oder keines von beiden findet statt.

A vor B zeigt die Möglichkeit an, eine Wirkung über eine Kausalkette von A nach B zu übertragen. Eine etwas allgemeinere, gegen die Vielschichtigkeit des Kausalitätsproblems weniger anfällige Definition, ist die: Von A nach B kann ein Signal gesendet werden, ist "Information" übertragbar. Umgekehrt kann, wenn A nach B kommt, also B vor A, in A ein Signal mit Ursprung in B empfangen werden.

Nicht weniger interessant sind die Fälle, in denen Signale weder von A nach B noch von B nach A gelangen können. Diese Paare nennt man entweder zueinander "raumartig" oder voneinander "kausal unabhängig". Denn Ereignisse, die an ihnen stattfinden oder stattfinden könnten, sind mit Notwendigkeit voneinander unabhängig. Andererseits nennt man ein solches Paar von Welt-Punkten aber auch raumartig, weil man ihm, wenigstens lokal, eine Entfernung zuordnen kann, die sich verhält, wie man es von einem ordentlichen Abstands begriff erwartet.

Die kausale Unabhängigkeit von Ereignissen, die in den unmittelbaren Umgebungen raumartiger Paare stattfinden, ist grundlegend für jedwede relativistische Quantenphysik: Simultane Messungen oder andere Eingriffe in räumlich voneinander getrennten Weltgebieten beeinflussen sich nicht in vorhersehbarer Weise. Sie verhalten sich wie unabhängige Zufallsgrößen. Die Schwierigkeiten mit nicht-vertauschbaren Observablen finden hier ihr vorübergehendes Ende.

Treten wir nun ein wenig in die Fußstapfen des Laplaceschen Dämons: Hätten wir in einem Raum-Zeit-Gebiet die Liste der Abstände aller raumartigen Paare von Welpunkten, dann hätten wir auch den kompletten metrischen Tensor. Diesen Zweck würde auch jede gekürzte Liste erfüllen, die nur Paare berücksichtigt, die nicht weiter als eine vorgegebene Länge, beispielsweise 1 mm, auseinander liegen. Jede derartige Liste impliziert die Kenntnis der möglichen zeitlichen Abläufe. Jede Änderung der räumlichen Geometrie zieht unausweichlich die Veränderung zeitlicher Abläufe nach sich.

Analoge virtuelle Listen kann man aus Zeitmessungen gewonnen denken. Man hat Kurven zu betrachten, längs denen Signalfortschreibung möglich ist. Man nennt sie "vorwärts gerichtete" Weltkurven. An jedem Punkt einer derartigen Weltkurve zeigt die Tangente in die von diesem Welpunkt aus erreichbare Zukunft.

Beschränken wir unsere Liste auf zeitartige Weltkurven und schließen lichtartige Weltkurven, die eine Sonderrolle beanspruchen, aus. Letztere sind Weltkurven, die durchfahren werden ohne Zeit zu verbrauchen. Auf ihnen steht die Zeit still. Sie gehören zu Grenzen, die raumartige und zeitartige Regimes trennen.

Es dauert seine Zeit, eine zeitartige Weltkurve zu durchlaufen. Diese Dauer ist eine Invariante der Kurve. Indem man alle zeitartigen Weltkurven, die A und B verbinden, zur Konkurrenz zulässt, entsteht ein neues Optimierungsproblem: Es muss nach einer Kurve gesucht werden, deren Verbrauch an Zeit, um von

A nach B zu gelangen, von keiner anderen Kurve übertroffen wird. Besagte maximale Zeitdauer ist die "zeitliche Distanz", die B von A trennt.

Auch unsere Liste der zeitlichen Abstände der Paare von Raum-Zeit-Punkten eines Weltgebiets, die kausale Abhängigkeiten zulassen, reicht aus, um die Geometrie des Gebiets komplett zu bestimmen. Es langt auch jede gekürzte Liste, die nur Paare von Weltpunkten enthält, deren zeitliche Distanz eine obere Schranke, zum Beispiel eine Millisekunde, nicht überschreitet.

Dass die Länge von Raumkurven minimiert, die Dauer von Zeitkurven aber maximiert werden muss, unterscheidet das Räumliche vom Zeitlichen.

2 Quantale Grundstrukturen

Auch in der Quantenphysik gibt es Gegenden von fundamentaler Bedeutung, die in markanter Weise nicht dynamisch sind.

Versuchen wir, dies an Hand der 2-Niveau-Systeme zu verstehen. Ihre klassische Version wäre ein System, das nur zwei verschiedene Zustände einnehmen kann, zum Beispiel ein Schalter, der nur die Stellungen EIN und AUS zulässt. Alle anderen Eigenschaften, (Aufbau, Zuverlässigkeit usw.), die eine konkrete Realisierung des Schalters betreffen, werden vernachlässigt. Als Abstraktum ist der klassische Schalter ein ziemlich triviales System.¹

Ein quantales 2-Niveau-System ist wesentlich komplexer. Bei ihm werden sowohl die beobachtbaren physikalischen Größen als auch ihre Zustände mit Hilfe von 2x2-Matrizen (Operatoren) beschrieben. Zählen wir ein paar physikalisch interessante Beispiele auf:

- Die Polarisation des Photons.
- Der Spin des Elektrons.
- Die beiden Energie-Niveaus des Ammoniak Moleküls, die den Ammoniak Maser ermöglichen, und ihre Überlagerungen.
- Organische Farbstoffe, etwa das Fuchsin, die ihre Farbe einem 2-Niveau Subsystem verdanken.
- Physikalisch von ganz anderer Art ist ein 2-Niveau System, das den neutralen K-Mesonen zugeordnet wird, um die eigenartigen Verhältnisse zu beschreiben, die sie mit der schwachen und der starken Wechselwirkung eingehen.

Um in den genannten Beispielen von der abstrakten Grundstruktur zur Dynamik zu kommen, müssen eine oder mehrere Matrizen zu Observablen erklärt werden: Die Helizität beim Photon, Drehimpulse beim Spin des Elektrons, die

¹Allerdings nur, wenn er als einzelnes Objekt auftritt und nicht in Massen, wie bei einem Prozessor

Energie beim Ammoniak und beim Fuchsin, die Hyperladung bei den neutralen K-Mesonen.

Woran sehen wir, dass es sich bei einem 2-Niveau-System um einen Elektronen-Spin handelt? Offenbar dadurch, dass wir es als Teilsystem eines anderen, umfassenderen erkennen, welches eine genauere Beschreibung des Elektrons gestattet. Diese Identifizierung entsteht, indem wir die Einbettung des kleineren Systems in ein oder mehrere größere Systeme analysieren: Der Spin des Elektrons verbleibt, wenn wir andere Freiheitsgrade, zum Beispiel den Impuls, ignorieren.

Analog bleibt nur die Polarisierung des Photons übrig, wenn wir von Energie (Frequenz) und Ausbreitungsrichtung des Photons absehen.

Weitere wichtige Kriterien für die physikalische Identifizierung von Quantensystemen folgen aus Erhaltungssätzen.

Die Einstufung als Teilsystem ist keineswegs herabsetzend. Es ist auch nicht als bloße Approximation an etwas, das wir genauer kennen, zu verstehen.

Im Gegenteil: Jedes Quantensystem ist Teilsystem von anderen Systemen, die zusätzliche Freiheitsgrade besitzen. Reduktion und Erweiterung von Quantensystemen sind für die "Quantenwelt" von grundsätzlicher Bedeutung. In dieser hierarchischen Struktur verbleibt jede Observable eines Systems als Observable in jedem größeren. Und umgekehrt bestimmt der Zustand eines Obersystems die Zustände aller seiner Teilsysteme. Letztere nennt man deshalb auch "reduziert" oder "marginal" bezüglich des Obersystems.

Kurz gesagt: Quantensysteme, ob endlich oder nicht, sind hierarchisch miteinander verknüpft. Von einem physikalischen System ist es wichtig zu wissen, von welchen anderen Systemen es ein Teilsystem ist und, falls das zutrifft, wie es in diesen untergebracht ist, wie es in ihnen eingebettet ist.

Ich vermerke noch, dass der Quantentheorie die Annahme eines "größten", allumfassenden Systems fremd ist. Aus sich heraus bietet sie keinerlei Handhabe für ein solches Konstrukt. Was sollte man auch von dem Versuch halten, alle in der Natur tatsächlich oder virtuell angelegten Freiheitsgrade zu umfassen und über alles, was in Zukunft entdeckt werden wird, vielleicht aber auch für immer verborgen bleibt, etwas aussagen zu wollen²?

Um zu erklären, welche der Regeln und Gesetze ich hier als "nicht-dynamisch" bezeichnen will, komme ich nochmals auf die beobachtbaren Größen zurück. Die Frage ist hier, was von der Identifizierung einer Matrix (oder eines Operators) mit einer konkreten beobachtbaren Größe abhängt, und was von dieser Identifizierung ganz unabhängig ist. Den unabhängigen, nicht-dynamischen Teil will ich für die Zwecke des Vortrages "quantale Grundstruktur" nennen.

Bereits unsere kleine Liste von 2-Niveau Systemen ist geeignet, sich der Frage zu nähern: Was hängt davon ab, ob wir eine Matrix mit der Beschreibung der Helizität des Photons, oder mit einer Spinkomponente des Elektrons, oder mit dem Energie-Operator identifizieren, und was nicht. Was bleibt, wenn wir die

²Auch in der Kosmologie beschränkt man sich auf eine überschaubare Zahl von Begriffen und Parametern.

Besonderheiten der einzelnen 2-Niveau Systeme ignorieren? Sehr wenig, wird man zurecht sagen. Denn die Vielfalt der Kräfte und Wechselwirkungen, die Spezifika ihrer Realisierungen, gehen verloren.

Und doch verbleibt nicht nur ein dürrer Rest, sondern etwas sehr Wichtiges: Das Überlagerungsprinzip und die Gesetze, die die Zufälligkeit von Quantenprozessen kontrollieren. Es sind Regeln, die von allen quantalen Vorgängen befolgt werden müssen. Sie sind von jener Klarheit und Schärfe, die wir von elementaren logischen Operationen kennen.

Versichern wir uns zunächst an Hand eines Beispiels, wie die elementare Logik mit "Eigenschaften" umgeht, die entweder wahr oder falsch sind, zutreffen oder nicht zutreffen können: Eine natürliche Zahl ist entweder eine Primzahl, oder sie ist es nicht. Also bilden in der Menge aller Zahlen die Primzahlen eine gut definierte Teilmenge. Es ist zwar tautologisch, zu sagen, eine Zahl sei prim, wenn sie zu dieser Teilmenge gehört. Aber durch diesen Trick entsteht eine Isomorphie zwischen Eigenschaften und Teilmengen einer Gesamtmenge: Die Eigenschaften werden durch eine Familie von Teilmengen repräsentiert.

Besonders interessant wird es, wenn nicht alle, sondern nur gewisse Teilmengen als Eigenschaften zugelassen werden. Dann wird man verlangen, dass logische Operationen, zum Beispiel das UND, das ODER und das NEIN, in einer solchen Familie von Teilmengen, sprich Eigenschaften, ausgeführt werden können. Diesen Trick hat uns G. Boole verraten.

In der Quantenphysik gibt es das nämliche Problem und die Willkür bei seiner Lösung ist nicht allzu groß; denn das Überlagerungsprinzip ist zu berücksichtigen:

Damit eine Menge von Zuständen eines quantalen Systems eine Eigenschaft im logischen Sinne sein kann, darf die Bildung von Überlagerungen nicht aus ihr herausführen. Eine quantale Eigenschaft muss also mit zwei oder mehreren Zuständen auch allen denkbaren Überlagerungen zukommen. Sie muss in diesem Sinne geschlossen sein.

Nach Birckhoff und von Neumann haben wir es mit einer notwendigen Bedingung zu tun. Nur für eine solche Menge kann eine Messapparatur existieren, die entscheiden kann, ob ein Zustand zu ihr gehört oder nicht.

Zwar muss nicht jede Menge von Zuständen, die die genannte Voraussetzung erfüllt, notwendigerweise eine Eigenschaft sein. Der Punkt ist, dass es nur Eigenschaften gibt und Messgeräte geben kann, die mit dem Überlagerungsprinzip im Einklang sind. Am Rande beinhaltet diese Behauptung eine sehr scharfe und weitreichende Verneinung der Existenz verborgener Parameter.

Ein, zwei Beispiele zur Erläuterung. Wählen wir in dem Raum, der einem Schrödingerschen Teilchen zugänglich ist, ein Teilgebiet G aus. Die Menge der Zustände, die bei einer Ortsmessung mit Notwendigkeit das Teilchen in G auffinden lässt, ist eine Eigenschaft. Es ist die Eigenschaft, in G lokalisiert zu sein. Trifft sie zu, so ist die Schrödingerfunktion nur in G von Null verschieden.

Im zweiten Beispiel verlangen wir, dass die Messung der kinetischen Energie mit Notwendigkeit einen Wert ergibt, der nicht größer als ein vorgegebener Wert ist.

Auch diese Vorschrift definiert eine Eigenschaft.

In diesen Formulierungen sollte die Wendung “mit Notwendigkeit” aufhören lassen. Man könnte an ihrer Stelle auch “mit Wahrscheinlichkeit Eins” sagen³. Sie führt uns auf eine weitere Besonderheit, die sie von der Klassischen Logik deutlich unterscheidet. Es ist die Rolle des Zufalls und der Wahrscheinlichkeit. Sie markiert eine Grenze zwischen Klassischer und Quantenphysik, vielleicht sogar die wichtigste.

Ein Schrödinger-Teilchen muss sich weder in einem Raumgebiet G aufhalten noch muss es zwingend außerhalb von G angetroffen werden. Es muss überhaupt nicht in irgendeinem Teilgebiet lokalisiert sein! Um dem damit verbundenen Dilemma zu entgehen, kommt der Zufall zu Hilfe:

Soll experimentell entschieden werden, ob das Schrödinger-Teilchen sich in G aufhält oder nicht, so ist es fast immer der pure Zufall, ob die Antwort JA oder NEIN lautet. In welchem Zustand sich das Teilchen auch anfangs befunden hatte, nach dem Test ist es entweder in G oder nicht in G . Dabei ist die Wahrscheinlichkeit, es in G anzutreffen, durch den Zustand vor der Messung festgelegt. Jedoch ist es innerhalb dieses Rahmens ein zufälliges Ereignis, ob der Experimentator JA oder NEIN findet. Findet er im Einzelfall JA, so darf er sicher sein, dass sich das Teilchen nach seiner Messung tatsächlich in G aufhält: Der Test präpariert einen neuen Zustand. Sobald wir eine Information über den Systemzustand erzwingen, passt sich dieser dem hierzu erforderlichen Eingriff an! (Ich muss zugeben, dass ich ein einfaches aber etwas akademisches Beispiel gewählt habe, da durch den Rand von G der Raum scharf in verschiedene Teile getrennt wird. Das ist energetisch nur angenähert möglich.)

Wir sehen hier ein weiteres, für die Quantenphysik fundamentales nicht-dynamisches Gesetz. Als Folge des Testens einer Quanten-Eigenschaft wird ein neuer Zustand hergestellt, der diese Eigenschaft entweder definitiv besitzt oder definitiv nicht besitzt. Welcher der beiden möglichen neuen Zustände hergestellt wird, ist nichts als Zufall. Bei häufiger Wiederholung der gleichen Messung im jeweils gleichen Zustand nähert man sich einer berechenbaren Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dadurch und durch nichts anderes wird der Zufall reguliert.

All das gilt unabhängig vom konkreten physikalischen Charakter des betrachteten Quantensystems und unabhängig von der Art der Wechselwirkungen. Im Rahmen der Quantenphysik ist es ein universelles Gesetz.

Nun muss ich noch auf eine weitere, bisher nicht erwähnte seltsame Eigenart quantaler Zustände zu sprechen kommen: Zustände sind generisch nicht lokalisiert. Jede Veränderung in einem begrenzten Raumgebiet zieht unmittelbar globale Veränderungen nach sich.

Insbesondere ist der Übergang von einem Zustand in einen neuen, der als Ergebnis des Testens einer Eigenschaft erfolgt, global und instantan⁴. Diese Behauptung kann man experimentell nur approximativ prüfen. Aber es gibt gute

³Für tatsächliche Messungen ist der Unterschied irrelevant.

⁴In der älteren Literatur wird vom Kollaps der Wellenfunktion gesprochen.

Experimente, die, bei vorsichtiger Abschätzung der Messfehler, für die Ausbreitung derartiger Zustandsänderungen vielfache Lichtgeschwindigkeiten messen. Und es gibt, wie schon gesagt, gute theoretische Gründe für die Behauptung, dass sich diese Änderungen prinzipiell nicht mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten können.

Die vermutlich eindrucksvollsten Experimente handeln von Messungen, die simultan in der Nähe zweier raumartig getrennter Weltpunkte ausgeführt werden. Der Zustand des zu messenden Systems kann so eingestellt werden, dass man aus der Messung am Weltpunkt A auf das Messergebnis im Weltpunkt B schließen kann. (Einstein-Podolski-Rosen-Effekt.) Einzelne Ereignisse, die derart streng korrelieren⁵, ohne jedoch kausale Abhängigkeiten zu erlauben, müssen rein zufällig sein. Jegliches Abweichen von der Zufälligkeit erlaubt die Übertragung von Information mit beliebig hoher Geschwindigkeit. Daher sind die in einer Einstein- oder Minkowski-Welt gültigen Schranken für kausale Prozesse mit dem Bornschen Postulat über die Zufälligkeit quantaler Prozesse auf Ge-deih und Verderb verbunden!

Diesen Aussagen, die in der Klassischen Physik kein Analogon besitzen, setzt die Theorie noch ein geometrisches Sahnehäubchen auf. In der Menge der Zustände eines Systems gibt es Metriken⁶, die die Bornschen Wahrscheinlichkeiten für Quantenprozesse in Abstände konvertieren: Je näher der Zustand X am Zustand Y liegt, umso größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass X in Y übergeht. Ist eine Zustandsänderung zeitlos, so verläuft sie auf einer kürzesten Verbindung im Raum der Zustände. Wenn aber die Veränderung des Zustandes an einen zeitlichen Vorgang geknüpft ist, wie wir es von der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung kennen, dann ist die entsprechende Kurve gekrümmt und keine Kürzeste.

Jeder mögliche Quantenprozess, der den Zustand X mit dem Zustand Y verbindet, wird im Raum aller Zustände als Kurve von X nach Y beschrieben. Die Länge dieser Kurve ist genau dann minimal, wenn der Prozess raum-zeitlich instantan ist, also keine Zeit verbraucht. Es ist die raum-zeitliche "Oberfläche", die nicht fähig ist, derartige Prozesse darzustellen. Sie wirkt eher wie ein Zensor, der nur Teile des Quantengeschehens zur Besichtigung frei gibt.

3 Spektralität

Eine der notwendigen Voraussetzungen für das Verständnis von Dynamik wird unter dem Namen "Spektralität" geführt. Ihr physikalischer Ursprung sind die Linien- und Energiespektren der Atome und Moleküle, ihr mathematischer ist in der Operatortheorie begründet.

Relativistisch gesehen fordert Spektralität, dass Massen und Energien niemals negativ sein dürfen.

⁵Es handelt sich nicht um statistische Korrelationen!

⁶Mathematisch von Fubini und Study bzw. von Bures entdeckt.

Nicht-relativistisch spielen nur Energiedifferenzen eine Rolle. Hier darf die Energie nicht unbegrenzt ins Negative abwandern. Anderenfalls hätten wir einen sich nie füllenden energetischen Abgrund, eine fatale energetische Instabilität.

Die Spektralitätsforderung ist in ein Postulat gegossene Erfahrung. Wir müssen sie *cum grano salis* per Hand hinzufügen. Auf den ersten Blick scheint sie von allen anderen theoretischen Grundannahmen unabhängig zu sein. Jedoch: Wenngleich wir es mit einem plausiblen und anschaulichen Postulat zu tun haben, werden mit ihm allerlei Fallen aufgestellt.

Wir wissen, dass die Klassische Physik keine Handhabe für die energetische Stabilität von Coulombschen Systemen bietet. Zumindest für das nicht-relativistische Regime wird dieser Mangel durch die Quantentheorie beseitigt. Dank Dyson, Lenard, Lieb, Thirring und anderen wissen wir, dass Vielteilchensysteme mit dominierenden Coulomb-Kräften energetisch⁷ stabil sein können: Die Bindungsenergie pro Teilchen bleibt beschränkt. Voraussetzung ist, dass das System insgesamt (so gut wie) neutral ist, dass keine nennenswerten Mengen an Antiteilchen vorhanden und mindestens die Hälfte der Teilchen Fermionen⁸ sind. Das ist so bei "gewöhnlichen" makroskopischen Dingen, einem Stück Eisen, Blumentöpfen, bei Hunden und Katzen, usw.

Wir müssen jedoch folgern, dass energetische Stabilität nicht nur von der Art der Wechselwirkung abhängt. Es ist auch wichtig, welche stabilen Teilchen massenhaft vorhanden sind und in welchem Verhältnis sie anzutreffen sind. Spektralität hängt nicht nur von den fundamentalen Wechselwirkungen ab! Offenbar können wir annehmen, dass die kosmologische Evolution dieses Problem für uns gelöst hat: Was an "normaler Materie" übrig geblieben ist, ist energetisch stabil. Das gilt aber nur, solange die Gravitation nicht dominant wird. Für sie ist die Bindungsenergie pro Teilchenmasse bereits in der Newtonschen Näherung nicht beschränkt.

Ich erinnere mich an einen Besuch bei Hans-Jürgen. Vor den Buchwänden stehend, griff ich die Kirchhoffsche Mechanik heraus, ein meisterhaft geschriebenes Lehrbuch. Ich war erstaunt, wie selbstverständlich Kirchhoff den Zusammenhang von Symmetrie und Erhaltung behandelt. Schon in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts hatten die Physiker erkannt, dass die allgemeinen Erhaltungssätze aus den Symmetrien von Raum und Zeit folgen. Jeder Erhaltungssatz der Mechanik, der nicht von der speziellen Natur des physikalischen Systems abhängt, muss einen Grund haben. Er kann nicht einfach vom Himmel gefallen sein. In Sonderheit erweist sich der Erhaltungssatz für die Energie als Konsequenz der Homogenität der Zeit.

In der Quantenphysik ist dieser Zusammenhang noch inniger. Die Symmetrien legen die korrespondierenden dynamischen Größen durch ihre Erzeugenden bis auf einen Faktor fest. Dieser Faktor ist das mit i multiplizierte (und nach Dirac normierte) Plancksche Wirkungsquantum.

⁷... und auch thermodynamisch

⁸Fermionen brauchen Platz, Bosonen nicht notwendigerweise.

Erinnern wir uns rückblickend an die abstrakten Quantensysteme, in denen das Überlagerungsprinzip und die quantalen Wahrscheinlichkeiten kodiert sind. In ihnen finden wir das Plancksche Wirkungsquantum nicht. Größen mit der physikalischen Dimension einer Wirkung sind in ihnen nicht vorhanden. Erst wenn wir Entfernung und Geschwindigkeit mit dynamischen Variablen wie Masse, Impuls und Energie verbinden wollen, bekommt es seine überragende Bedeutung. Sein Auftritt verbindet rein raum-zeitliche Konstrukte mit dynamischen.

Und was ist mit i , einer der beiden Wurzeln aus -1 ? Heisenberg und Schrödinger haben die in der oberen Hälfte der Gaußschen komplexen Zahlenebene liegende Wurzel in ihren Vertauschungsregeln und Bewegungsgleichungen benutzt. Denkt man sich die reelle Achse der Gaußschen Ebene als Zeitachse, so vergeht die Zeit, indem wir ihre obere Hälfte links liegen lassen, sie im mathematisch positiven Sinne umfahren.

So gesehen hat Spektralität eine physikalisch nicht leicht zu verstehende Konsequenz: Man kann die Zeit analytisch in die obere Halbebene fortsetzen. Zeitabhängige Erwartungswerte können daher oft als stetige Randwerte analytischer Funktionen dargestellt werden. Eine analytische Funktion wird als Ganzes bereits im Kleinen vollständig bestimmt. Jede Abänderung zieht unweigerlich ihre globale Veränderung nach sich. Auch diese simple Tatsache stützt die Behauptung über die nicht-lokale Natur von (generisch allen) Quantenprozessen.

Analytische Fortsetzung physikalisch relevanter Größen in sogenannte unphysikalische Bereiche wie komplexe Impulse, Energien, Zeitvariable usw. ist eine weit ausgebaute Methode der Quantenphysik. Die Streutheorie macht exzessiven Gebrauch von ihr. In der Relativistischen Quantentheorie wird sie herangezogen, um das Spin-Statistik Theorem zu beweisen, aber auch den Unruh-Effekt, die Minkowski Variante der Hawkinschen Strahlung schwarzer Löcher und manches mehr.

Es ist eigenartig, dass für einige fundamentale Sätze der Physik keine Beweismethode gefunden worden ist, die die analytische Fortsetzung in anscheinend unphysikalische Wertebereiche vermeidet.

Spektralität ist eine sehr vernünftige Forderung, da sie als energetische Stabilität verstanden werden kann. Weiterführende Konsequenzen ergeben sich jedoch erst in Verbindung mit Symmetrien, die von zeitartigen Transformationen herrühren. Es ist das Dreieck a) dynamische Observable, b) Symmetrie und c) Erhaltungssatz, das immer wieder durchlaufen wird, um Postulaten wie der Spektralität Bedeutung zu verleihen. Wird dieses Dreieck an einer Stelle zerbrochen, kommt man schnell in Beweis- oder Definitionsnot, als wäre ein Kompass verloren gegangen.

Und das geschieht, wenn wir die Spezielle Relativitätstheorie verlassen und Quantentheorie auf allgemeineren Raum-Zeit-Geometrien zu treiben beabsichtigen. Der allgemein beliebte Langrange-Formalismus reicht dann selbst für freie Teilchen nicht zur korrekten Quantisierung aus. Es muss noch auf die

richtige Massen- und Energieabhängigkeit geachtet werden. Im hochsymmetrischen Minkowskischen Fall erzielt man mit energetisch stationären Lösungen die gewünschte Spektralität. Stationarität aber wird als Invarianz gegen Zeitverschiebungen verstanden. Einige Autoren meinen deshalb, vermutlich etwas zu voreilig, dass man nur in einem asymptotischen Sinn von Teilchen sprechen dürfe, und das auch nur unter der Annahme, wir hätten es mit einer Welt zu tun, die für hinreichend große Entfernungen vom eigentlichen Geschehen sich immer genauer einer Minkowski Welt annähert.

4 Die Welt ohne Symmetrien

Was erwartet uns in einer Raum-Zeit ohne Symmetrien ⁹? Auch hier gibt es Transformationen mit zeitartigen Trajektorien im Überfluss. Jedoch lassen sie die metrische Struktur nicht invariant. Daher haben wir keinen Grund, auf eine von ihnen zu zeigen und sie der Energie (oder dem Impuls) zuzuordnen (oder für sie einen Erhaltungssatz fordern).

Es entsteht eine Art Definitionsnot: Der Begriff des universellen Erhaltungssatzes, des allgemeinen Integrals der Bewegung, wird fragwürdig. Spezielle Integrale konkreter physikalischer Systeme darf man hingegen erwarten.

Wie schon gesagt, bemerkt man das angedeutete Problem schmerzlich bei dem Versuch, auch nur das einfachste freie Quantenfeld auf einer symmetrieloosen Raum-Zeit zu etablieren. Trotz vieler Anstrengungen und schöner Teilerfolge muss die Aufgabe als ungelöst angesehen werden. Allerdings sind 3- und 4-dimensionale Probleme ohne Symmetrien mathematisch notorisch überaus schwierig. Doch muss wohl auch noch Einiges zur begrifflichen Analyse des Problems getan werden.

Würde in der heute üblichen Manier ein Wettbewerb um die raffinierteste Gleichung der Physik ausgeschrieben werden, so würde sicherlich die Einsteinsche Gleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie als unangefochtener Sieger hervorgehen. Schon kurz nach ihrer Aufstellung zeigte H. Cartan ihre Einzigartigkeit unter sehr wenigen und sehr vernünftigen Annahmen. Nur zwei Konstanten bleiben frei: Die auch heute noch nicht voll verstandene Kosmologische Konstante und die Gravitationskonstante. Zum Besonderen gehört, dass der Energie-Impuls Tensor einem Ausdruck gleichgesetzt wird, der allein aus der Metrik heraus erklärt ist. Denken wir etwa an die eingangs diskutierte Liste räumlicher Abstände. Sie bestimmt nicht nur die gesamte Metrik sondern auch die Verteilung von Energie und Impuls, wenn auch in einer etwas delikaten Weise.

Ganz im Gegensatz dazu ist der Energie-Impuls Tensor für kein physikalisches System ohne Kenntnis des metrischen Tensors bildbar. Ohne Metrik ist er undefiniert.

⁹Nur von Raum-Zeit-Symmetrien ist hier die Rede!

Die weltpunktweise Erhaltung der Energie ist diesem Tensor als Existenzbedingung auferlegt worden. Infolge des allgemeinen Mangels an Symmetrie, kann hieraus kein Erhaltungssatz für Weltgebiete hergeleitet werden, wie klein oder groß sie auch seien.

Man kann vom Energie-Impuls Tensor aber Positivität von Energie und Ruhemasse verlangen: Spektralität ist keine Folge der Einsteinschen Gleichungen. Sie kann nur ad hoc gefordert werden. Aber man kann sie wenigstens formulieren.

Die Situation wird wesentlich besser, wenn weitere Annahmen erfüllt sind. So kann eine Art Gesamtenergie definiert werden, wenn asymptotisch flache "Zeitschlitz" existieren. Für die Schwarzschild-Lösung bekommt man so den "richtigen" Wert.

Ein Zeitschlitz ist eine Teilmenge der Raum-Zeit, deren Weltpunkte paarweise raumartig angeordnet sind und die nicht vergrößert werden kann, ohne dieses Charakteristikum zu zerstören. Ein Zeitschlitz ist ein Moment in der zeitlichen Entwicklung, ein Augenblick von idealer Kürze.

Über den Schwarzschild-Fall hinaus hat man starke Aussagen für fast-stationäre¹⁰ Zeitschlitz beweisen können. In besagtem Fall ist die Energiedichte der Riemannschen skalaren Krümmung proportional. Von der gesamten Energie konnte man jetzt zeigen, dass sie größer ist als die Energiesumme der in ihr eventuell enthaltenen Schwarzen Löcher, eine 30 Jahre alte Vermutung von Penrose. Ohne die vorausgesetzte Spektralität brechen die mathematisch sehr aufwendigen und intelligenten Beweise zusammen und die genannten und weitere schöne Ergebnisse sind nicht mehr richtig.

Der Energie-Impuls Tensor reflektiert im Idealfall alles, was dynamisch geschieht. Er wirkt dabei wie ein Filter, in den alles Dynamische eingebracht wird, und der nur einen genau ausgesuchten Anteil der dynamischen Komplexität hindurch lässt. Kennt man daher besagten Tensor, so wissen wir keineswegs welche Vielfalt an physikalischen Prozessen sich hinter ihm verbirgt. Das Ausführen dieser Reduktion ist die schwierige Weise, die Einsteinschen Gleichungen zu lesen. Sie besteht in der Vorgabe eines physikalischen Systems, z.B. eines elektromagnetischen Feldes, und der Suche nach der Metrik. Die Metrik soll dann derart sein, dass der mit ihr gebildete Energie-Impuls Tensor den Einsteinschen Gleichungen genügt.

Eine einfache und naheliegende Hypothese meint, der Energie-Impuls Tensor sei als Erwartungswert zu verstehen und der metrische Tensor eine Zufallsgröße, wie man es von Quantensystemen gewohnt ist. Das ist vermutlich zu kurz gedacht, obwohl niemand weiß, wie es ist.

¹⁰Gemeint ist das Verschwinden der zweiten Fundamentalform sowie asymptotische Flachheit.

5 Die Metrik und der Zufall

Wie verträgt sich die Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Zufall, wie kommt sie mit der Quantenphysik zurecht? Sie tut es nicht perfekt, aber erstaunlich gut.

Bei einer hypothetischen quantenphysikalischen Ausmessung des metrischen Tensors ist die zu erwartende Unschärfe extrem gering und ganz außerhalb aller Experimentierkunst. Denn wir haben nicht Entfernungen¹¹ und Impuls gleichzeitig zu messen, sondern Entfernungen und Geschwindigkeiten. Die metrischen Verhältnisse stellen sich somit als ein “fast klassisches” Gebilde dar.

Dieser Schluss wird erst brüchig, wenn es um sehr dichte Sterne oder um schwarze Löcher geht. Bei letzteren erlauben Symmetrien die willkürfreie Definition besonderer dynamischer Größen. Damit ist auch die Quantenphysik wieder in ihrem Element. Und nicht nur das, der vorhergesagte Quanteneffekt, die Hawkinsche Strahlung, hat einen besonders guten Beweisstatus in der Wightmanschen axiomatischen Quantenfeldtheorie. Er gehört zu den Glanzpunkten des Zusammenwirkens von Quanten- und Allgemeiner Relativitätstheorie.

Werfen wir nochmals einen Blick auf das Problem der Messungen an einem Quantensystem. Hierzu nehmen wir an, in einem Raumgebiet G werde eine Messung durchgeführt, die das gesamte Raumgebiet betrifft. Die Messung präpariert dann momentan und global einen neuen Zustand, indem in der Menge aller zu G raumartig gelegenen Weltpunkte eine neue Anfangsbedingung für die weitere quantale Evolution gesetzt wird. Ist das Messergebnis bekannt, so hat man erfahren, worin die Zustandveränderung besteht.

Nach dieser Wiederholung des schon früher Gesagten, fragen wir uns nun, *wann* das Messergebnis bekannt sein kann.

Das Messergebnis ist eine Information. Es unterliegt somit den Einsteinschen Kausalitätsforderungen. Wird, wie angenommen, ganz G zur Durchführung der Messung benötigt, so muss diese Information von allen in G liegenden Punkten abgerufen werden. Folglich kann das Ergebnis nur an Weltpunkten verfügbar sein, die kausal nach allen in G liegenden Weltpunkten kommen¹², die also in Bezug auf G zeitlich später sind. Ist r die lineare Ausdehnung von G und c die Lichtgeschwindigkeit, so müssen wir mindestens die Zeit r/c auf das Messergebnis warten. Erst danach wird uns die Veränderung bekannt, die zur Messzeit eingetreten ist. Vorher wird sie vor uns geheim gehalten!

Es ist auch dieser Trick, der das Zusammenspiel von Raum-Zeit Metrik mit quantalen Prozessen widerspruchsfrei gestattet. Wären die Messergebnisse unmittelbar bekannt und könnten wir nicht kompatible Messungen beliebig schnell hintereinander ausführen, so wäre Informationstransport mit Überlichtgeschwindigkeit möglich, wenn auch mit einem wesentlich anderen Mechanismus als dem bereits früher angesprochenen.

¹¹Messungen der Entfernungen werden meist als Ortsmessungen bezeichnet.

¹²Diese Weltpunkte liegen im Durchschnitt aller von G ausgehenden Zukunftskegel.

In der Tat gibt es in der Quanten-Informationstheorie eine Reihe von Protokollen, die zu akausalen Prozessen führen, wenn man annimmt, quantenphysikalisch inkompatible Messungen und Manipulationen könnten ohne Zeitverlust hintereinander ausgeführt werden. Ich halte eine solche Annahme für falsch.

Die eben kurz dargestellten Überlegungen sind auch allgemein relativistisch gut denkbar. Hierzu müssen wir lediglich annehmen, dass auch für die Metrik die Anfangsbedingungen (ein ganz klein wenig!) geändert werden und die Veränderung der Metrik mit der Verarbeitung der Information mitlaufen. Man kann sich so vorstellen, dass das Ergebnis der Messung in Übereinstimmung mit allen kausalen Forderungen bekannt wird – und nicht früher. Dabei ist die Veränderung der Metrik abrupt allenfalls auf allen Zeitschlitzten, die G enthalten. Auf ihnen kann infolge eines Eingriffs in ein Quantensystem eine Änderung des Zustands als ein sogenannter instantaner Quantensprung¹³ erscheinen. Die damit verbundenen Veränderungen in Zustandsräumen der Quantensysteme verlaufen hingegen glatt, siehe das unter dem Stichwort “geometrisches Sahnehäubchen” Gesagte.

Ich hatte schon betont, dass zur Bildung des Energie-Impuls Tensors, wie schlechthin zu allen dynamischen Observablen, die Beihilfe des metrischen Tensors unabdingbar ist. Beeinflusst er auch den nicht-dynamischen Bereich, die quantalen Grundstrukturen? Diese Frage ist zu bejahen. Die Wahrscheinlichkeiten, die für die Änderung des Zustandes bei Eingriffen zuständig sind, hängen von der raum-zeitlichen Metrik ab. Dies zeigen schon die einfachsten Beispiele. Auch die (äquivalente) Frage, welche Operatoren als Observable zulässig sind, wird durch die Geometrie mit entschieden.

Damit rückt auch die Art und Weise, wie Quantensysteme ineinander verschachtelt sind, in den Zugriff der Metrik. Da bei einer Messung in G die Zustandsänderung in allen Zeitschlitzten, die G enthalten, vor sich gehen muss, können weitere Abhängigkeiten entstehen, die logisch sehr schwer zu kontrollieren sind, von ihrer konkreten Form ganz zu schweigen.

Der Zugriff der raum-zeitlichen Geometrie auf die quantale Grundstruktur ist im stationären Fall gut verstanden. Allgemein ist das aber nicht so. Einen großen Teil der Schwierigkeiten sieht man bereits bei dem Versuch, einfachen Quantensystemen zeitabhängige Randbedingungen aufzuerlegen. Eine systematische Untersuchung dieser Aufgabe ist mir nicht bekannt.

Hiermit schließe ich meine subjektiven und stückhaften Ausführungen. Manchmal hänge ich der Vorstellung nach, es gäbe eine Quantenwelt, die uns auf irgendeine Weise Raum und Zeit als Benutzeroberfläche zur Verfügung stellt.

¹³Eine historisch korrekte, heute vor allem von Werbefachleuten benutzte Bezeichnung.