UNTERSCHIED ZWISCHEN PARTIELLER $\frac{\partial}{\partial t}$ UND TOTALER ABLEITUNG $\frac{d}{dt}$

Sei $f(x,y,t)$ eine in x, y und t differenzierbare Funktion, wobei t für die Zeit stehen soll. Dann gibt $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,t)$ die Änderung von $f(x,y,t)$ in x-Richtung im Punkt (x,y) zur Zeit t an. Die partielle Ableitung nach der Zeit $\frac{\partial}{\partial t}f(x,y,t)$ gibt an, wie sich $f(x,y,t)$ am Punkt (x,y) und zur Zeit t mit der Zeit ändert.

Nun könnte f z. B. ein Kraftfeld sein und die Koordinaten x und y beschreiben, wie sich ein Teilchen durch dieses Kraftfeld bewegt; d. h. $x = x(t)$ und $y = y(t)$ beschreiben eine Kurve in der Ebene. Fragt man jetzt, wie sich $f(x,y,t)$ entlang dieser Kurve mit der Zeit t ändert muss man die totale Ableitung verwenden welche auch die implizite Zeitabhängigkeit von $f(x,y,t)$ berücksichtigt:

$$\frac{d}{dt}f(x,y,t) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}}_{\text{Änderung in x-Richtung mal Geschwindigkeit in x-Richtung}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{1}$$

Die ersten beiden Summanden geben an, wie sich $f(x,y,t)$ entlang der Bahnkurve $(x(t),y(t))$ mit der Zeit ändert. Sie sind das Produkt aus der Ableitung in x- bzw. y-Richtung und der Geschwindigkeit mit der sich das Teilchen in die jeweilige Richtung bewegt. Dazu kommt noch der letzte Term, welcher die explizite Zeitabhängigkeit von $f(t)$ berücksichtigt.
Die totale Ableitung $\frac{df}{dt}$ berücksichtigt also die Änderung von $f(x,y,t)$ durch die Bewegung entlang der Kurve plus die explizite zeitliche Änderung von f während die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}$ nur die explizite zeitliche Abhängigkeit von f berücksichtigt.