Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2016/17

Übungen zu TP1 - Theoretische Mechanik (StEx Lehramt)

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 11.1 6 Punkte

Wir betrachten das in der Vorlesung diskutierte Beispiel des Pendels, das in der x_1-x_3-Ebene unter dem Einfluss der Erdschwerkraft schwingt. D.h. wir betrachten einen Massenpunkt der Masse m der an einer masselosen Stange der Länge l im Ursprung befestigt ist. Die Schwerkraft wirke in negativer x_3-Richtung.

a) Drücken sie den Ortsvektor $\vec{r}$ in Polarkoordinaten $q_1 = \phi$, $q_2 = r$ aus, d.h. in verallgemeinerten Koordinaten. ϕ sei dabei der Winkel zwischen dem Ortsvektor $\vec{r}$ und dem nach unten zeigenden Einheitsvektor $-\vec{e}_3$ und $r = |\vec{r}|$. Berechnen Sie $\dot{\vec{r}}$ in diesen Koordinaten, d.h. drücken Sie die Komponenten von $\dot{\vec{r}}$ durch $q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2$ aus. Beachten Sie dabei die Zwangsbedingung des Systems.

b) q_j sei diejenige verallgemeinerte Koordinate, die durch die Zwangsbedingung nicht festgelegt wird. Drücken Sie die kinetische Energie T sowie die potentielle Energie U durch q_j und $\dot{q}_j$ (sowie l und m) aus.

c) Berechnen Sie die Lagrange-Funktion $L = T - U$ sowie die Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{q}_j} - \frac{dL}{dq_j} = 0$$

für die freie verallgemeinerte Koordinate q_j, d.h. drücken Sie die linke Seite der Lagrange-Gleichung durch q_j, $\dot{q}_j$, $\ddot{q}_j$ (sowie l und m) aus.

Aufgabe 11.2 6 Punkte

Wir betrachten das in der Vorlesung diskutierte Beispiel der Bewegung eines Massenpunktes mit Masse m in einem Kegel mit Öffnungswinkel 2α unter dem Einfluss der Erdschwerkraft. Der Kegel sei dabei nach oben geöffnet, die Kegelspitze sei im Ursprung und die Mittelachse des Kegels sei die x_3-Achse. Die Schwerkraft wirke in negativer x_3-Richtung.

a) Drücken sie den Ortsvektor $\vec{r}$ in Kugelkoordinaten $q_1 = r$, $q_2 = \phi$, $q_3 = \theta$ aus, d.h. in verallgemeinerten Koordinaten (siehe Skizze aus der Vorlesung für die Definition von ϕ und θ). Berechnen Sie $\dot{\vec{r}}$ in diesen Koordinaten, d.h. drücken Sie die Komponenten von $\dot{\vec{r}}$ durch $q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3$ aus. Beachten Sie dabei die Zwangsbedingung des Systems.

b) q_{j_1}, q_{j_2} seien diejenigen verallgemeinerte Koordinaten, die durch die Zwangsbedingung nicht festgelegt wird. Drücken Sie die kinetische Energie T sowie die potentielle Energie U durch $q_{j_1}, q_{j_2}, \dot{q}_{j_1}, \dot{q}_{j_2}$ (sowie α und m) aus.

c) Berechnen Sie die Lagrange-Funktion $L = T - U$ sowie die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{q}_j} - \frac{dL}{dq_j} = 0$$

für $j = j_1$ und $j = j_2$, d.h. drücken Sie die linke Seite der Lagrange-Gleichungen durch $q_{j_1}, q_{j_2}, \dot{q}_{j_1}, \dot{q}_{j_2}, \ddot{q}_{j_1}, \ddot{q}_{j_2}$ (sowie α und m) aus.

Schöne Feiertage!

Abgabe: Bis Montag 9.1.2017, vor der Vorlesung. Sie können Lösungen alleine oder zu zweit abgeben.