Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2016/17

Übungen zu TP1 - Theoretische Mechanik (StEx Lehramt)

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 6.1 6 Punkte

Wir betrachten ein System von zwei Massenpunkten mit Massen m_1, m_2 und Ortsvektoren $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$. Schwerpunkt $\vec{R}$, Verbindungsvektor $\vec{r}$, Gesamtimpuls $\vec{P}$, gesamte kinetische Energie T und reduzierte Masse μ seien wie in der Vorlesung definiert. Zusätzlich definieren wir den Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ als

$$\vec{L} = m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 \,.$$

Für die Kräfte $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ auf die Massenpunkte 1 und 2 gelte

$$\vec{F}_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\vec{\nabla}_1 U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\,, \qquad \vec{F}_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\vec{\nabla}_2 U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\,, \qquad U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\kappa}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\,,$$

mit einer reellen Konstante κ. Verifizieren Sie folgende Identitäten durch explizites Nachrechnen.

a) $M\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$

b) $T = \dfrac{\vec{P}^{\,2}}{2M} + \dfrac{\mu \dot{\vec{r}}^{\,2}}{2}$

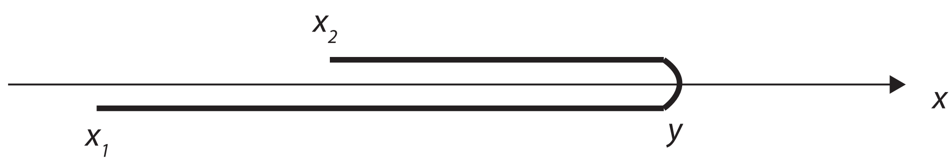
c) $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \mu\, \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

d) $\dot{\vec{L}} = \vec{0}$

Aufgabe 6.2 6 Punkte

Wir betrachten die Dynamik einer Peitsche in einer idealisierten Form. Die Peitsche habe die Gesamtlänge l und bewege sich entlang der x-Achse. Anfangs- und Endpunkt der Peitsche seien durch x_1 und x_2 angegeben. Die Peitsche sei am Punkt y, $y > x_1$, $y > x_2$ umgeschlagen. Wir vernachlässigen die Ausdehnung der Peitsche senkrecht zur x-Achse, insbesondere nehmen wir an, dass das “Kurvenstück” bei y in der Skizze die Länge 0 hat. Es ist nur zur Verdeutlichung eingezeichnet.

Die Peitsche habe die Gesamtmasse M. Wir nehmen an, dass diese Gesamtmasse sich gleichmäßig über die gesamte Peitschenlänge verteilt. (Die Peitsche ist also überall “gleich



dick".) In der Praxis ist natürlich z.B. x_1 fest(gehalten) und nur x_2 beweglich. Es ist aber zweckmässig, beide Punkte als im Prinzip beweglich zu betrachten. Um die Dynamik der Peitsche zu beschreiben, betrachten wir diese als ein abgeschlossenes System von zwei Massenpunkten bei x_1 und x_2, die sich entlang der x-Achse bewegen. Die Massenpunkte haben die Massen m_1, m_2 mit $m_1 + m_2 = M$. Dabei sei m_1 die Masse des "unteren" Peitschenstücks und m_2 die Masse des "oberen Peitschenstücks". Damit sind m_1 und m_2 insbesondere im Allgemeinen nicht konstant.

a) Berechnen Sie y, m_1, m_2 in Abhängigkeit von x_1, x_2, l, M.

b) Berechnen Sie die gesamte kinetische Energie T des Systems und die reduzierte Masse μ.

c) Drücken Sie μ, T und $T_{\text{rel}} = T - \frac{1}{2}M\dot{X}^2$ durch M, l, Relativkoordinate $x = x_1 - x_2$ und Schwerpunktskoordinate X aus. X ist hierbei nicht durch die übliche Formel gegeben! Stattdessen ergibt sich X wie folgt (das ist gegeben und soll nicht gezeigt werden): Der Schwerpunkt des oberen / unteren Peitschenstückes ist

$$X_{\text{oben}} = \frac{1}{2}(x_2 + y)\,, \qquad X_{\text{unten}} = \frac{1}{2}(x_1 + y)\,.$$

Der Schwerpunkt der Peitsche ist daher

$$X = \frac{1}{M}(m_1 X_{\text{unten}} + m_2 X_{\text{oben}}) = \frac{1}{2M}(m_1(x_1 + y) + m_2(x_2 + y))\,.$$

d) Die Bewegungsgleichungen des Systems lauten ausgedrückt durch x, X, μ, M (das ist gegeben und soll nicht gezeigt werden :-)):

$$M\ddot{X} = 0\,, \qquad \frac{d}{dt}(\mu\dot{x}) = -\frac{M}{4}\frac{x}{l^2}\dot{x}^2\,.$$

Folgern Sie daraus, dass T_{rel} und T Erhaltungsgrößen sind.

e) Es sein nun $T_{\text{rel}} = \frac{M}{8}v_0^2$ mit einer Konstanten $v_0 > 0$. Drücken Sie $\dot{x}$ durch x, M, l und v_0 aus. Was gilt für $\dot{x}$ bei $x = \pm l$?

Abgabe: Bis Montag 21.11.2016, vor der Vorlesung. Sie können Lösungen alleine oder zu zweit abgeben.