Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2016/17

Übungen zu TP1 - Theoretische Mechanik (StEx Lehramt)

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1 6 Punkte

Wir betrachten die Bewegung eines Punktteilchens mit Masse m in einer Raumdimension unter dem Einfluss des Kraftfeldes

$$F(x) = -\lambda x^3 + \mu x \,,$$

wobei λ und μ positive Konstanten sind.

a) Berechnen Sie das zu diesem Kraftfeld gehörende Potential $U(x)$. Legen Sie dabei die unbestimmte Konstante in $U(x)$ so fest, dass $U(0) = 0$ gilt.

b) Skizzieren Sie $U(x)$. Markieren Sie in Ihrer Skizze alle stabilen und labilen Gleichgewichtspunkte.

c) Berechnen Sie die x-Koordinate aller stabilen und labilen Gleichgewichtspunkte sowie den Wert von U an diesen Punkten.

d) Es sei x_s der stabile Gleichgewichtspunkt mit der größten x-Koordinate. Nähern Sie das Potential für $|x - x_s| \ll 1$ durch ein harmonisches Potential $U_H(x)$ an, indem Sie $U(x)$ am Punkt x_s bis zur quadratischen Ordnung Taylor-entwickeln.

e) Lösen Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung für das Kraftfeld $F_H(x) = -\frac{d}{dx} U_H(x)$ mit den Anfangsbedingungen die dadurch festgelegt sind, dass das Teilchen die Gesamtenergie E hat und $x(0) = x_s$ gilt. Drücken Sie alle in der Lösung auftretenden Konstanten durch E, m, λ und μ aus.

f) Wir betrachten nun die Bewegung im eigentlichen Potential $U(x)$. Das Teilchen habe die Energie $E = 0$, befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle $x(0) = x_s$ und habe eine negative Geschwindigkeit. Geben Sie die Zeit τ an, nach der das Teilchen sich an der Stelle $x(\tau) = 0$ befindet. Die Antwort lässt sich ohne lange Rechnungen angeben, soll aber begründet werden.

Aufgabe 5.2 6 Punkte

Wir betrachten einen gedämpften harmonischen Oszillator mit Masse m, Federkonstante $k > 0$ und Reibungskonstante $\rho > 0$ in einer Raumdimension. Die Newton'sche Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - 2\rho\dot{x}(t)\,.$$

Wir betrachten im Folgenden den Fall schwacher Dämpfung, d.h. $\rho^2 < km$.

a) Die (mechanische) Gesamtenergie E sei definiert als

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\,.$$

Folgern Sie aus der Bewegungsgleichung – ohne diese zu lösen –, dass E mit der Zeit abnimmt.

b) Verfizieren Sie, dass

$$x(t) = e^{-\frac{\rho}{m}t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))\,,$$

für ein geeignetes, von Ihnen zu bestimmendes $\omega > 0$, eine Lösung der Bewegungsgleichung ist. Drücken Sie A und B durch die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ aus.

c) Es sei nun $x_0 = 0$. Berechnen Sie für diesen Fall die Gesamtenergie.

d) Ersetzen Sie im in c) gefundenen Resultat jeden Kosinus durch 1 und jeden Sinus durch -1 um eine grobe Näherung $E \approx \widetilde{E}$ für die Energie zu erhalten (in diesem Fall eine obere Schranke). Skizzieren Sie eine mögliche Phasenkurve für die Energiebeziehung

$$\widetilde{E} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\,.$$

unter der Annahme, dass $\widetilde{E}(t = 0) > 0$. Verwenden Sie dafür als Koordinaten des Phasenraums $\tilde{q} = \sqrt{k}x$ und $\tilde{p} = \sqrt{m}\dot{x}$.

Abgabe: Bis Montag 14.11.2016, vor der Vorlesung. Sie können Lösungen alleine oder zu zweit abgeben.