Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2016/17

Übungen zu TP1 - Theoretische Mechanik (StEx Lehramt)

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 4.1 – Getriebener Oszillator ohne Dämpfung 6 Punkte

Wir betrachten eine getriebene Schwingung in einer Raumdimension, d.h. die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{r}(t) = F(r(t), t)\,, \qquad F(r(t), t) = -kr(t) + f_0 \cos(\omega t)\,,$$

wobei k, f_0 reelle Konstanten sind mit $k > 0$.

a) Wir betrachten zunächst eine freie Schwingung, d.h. $f_0 = 0$. Mathematisch spricht man von einer *homogenen Differentialgleichung* weil in allen Termen $r(t)$ auftaucht. Verifizieren Sie, dass in diesem Fall

$$r(t) = r_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\,,$$

für eine geeignete, von Ihnen zu bestimmende Konstante ω_0, eine Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichung ist. Drücken Sie die Konstanten A und B durch Anfangsort r_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ aus.

b) Wir betrachten nun eine getriebene Schwingung, d.h. $f_0 \neq 0$. Mathematisch spricht man von einer *inhomogenen Differentialgleichung*, weil es einen Term gibt, der unabhängig von $r(t)$ ist. Verifizieren Sie, dass in diesem Fall

$$r(t) = r_{I,S}(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)\,,$$

für geeignete, von Ihnen zu bestimmende Konstanten C und D, eine Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichung ist.

c) Die in a) gefundene Lösung ist die allgemeine Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichung für den Fall $f_0 = 0$, die in b) gefundene Lösung ist allerdings nicht die allgemeine Lösung für $f_0 \neq 0$. Aus der Mathematik ist bekannt, dass in diesem Fall einer *linearen inhomogenen Differentialgleichung* (linear, da alle Terme, in denen $r(t)$ vorkommt, linear von $r(t)$ oder Ableitungen davon abhängen) die allgemeine Lösung gegeben ist durch die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung plus eine beliebige spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Verifizieren Sie diesen Sachverhalt an dem vorliegenden Beispiel, d.h.:

c1) Verfizieren Sie, dass

$$r(t) = r_I(t) = r_H(t) + r_{I,S}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$$

eine Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichung für $f_0 \neq 0$ ist. Dabei sind A, B beliebige Konstanten, ist ω_0 die Konstante, die Sie in a) berechnet haben, und sind C, D die Konstanten, die Sie in b) berechnet haben.

c2) Drücken Sie die noch unbestimmten Konstanten A und B durch Anfangsort r_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ aus.

Aufgabe 4.2 – Hagelkorn im Schwerefeld der Erde 6 Punkte

Wir betrachten ein Hagelkorn, d.h. eine Eiskugel mit Radius $R = 1$cm. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Hagelkorn in Ruhe 1km über der Erdoberfäche. Auf das Hagelkorn wirken die Schwerkraft $\vec{F}_S$ und die Reibungskraft $\vec{F}_R$

$$\vec{F}_S = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_R = -\frac{1}{2} C_W \pi R^2 \rho_L |\dot{\vec{r}}| \dot{\vec{r}}.$$

Dabei ist m die Masse des Hagelkorns, die Sie mit der Dichte von Eis $\rho_E \approx 1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ selbst berechnen sollen, $C_W \approx 0.5$ der Luftwiderstandskoeffizient von Luft, $\rho_L \approx 1\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ die Luftdichte und $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ die Erdbeschleunigung.

a) Lösen Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_R$ mit den oben angegeben Anfangsdaten. Hinweis: die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{f}(t) = -A + B(\dot{f}(t))^2\,,$$

für beliebige, positive Konstanten A, B, lautet

$$f(t) = C - \frac{\log\left(\cosh\left(\sqrt{AB}(t-D)\right)\right)}{B}\,.$$

Dabei ist $\log$ der natürliche Logarithmus, $\cosh$ der Kosinus Hyperbolicus und C, D sind beliebige Konstanten.

b) Nach vergleichsweise kurzer Zeit stellt sich ein Kräftegleichgewicht ein, d.h. $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F} \approx 0$. Verfizieren Sie dieses – d.h. $\ddot{\vec{r}}(t) \approx 0$ für große Zeiten t – indem Sie die in a) gefundene Lösung für große t approximieren. Verwenden Sie dafür $\cosh(x) \approx \frac{1}{2}\exp(x)$ für große x.

c) Verwenden Sie die approximative Lösung für große t um zu bestimmen, mit welcher Geschwindigkeit das Hagelkorn auf der Erde aufschlägt.

Abgabe: Bis Montag 07.11.2016, vor der Vorlesung. Sie können Lösungen alleine oder zu zweit abgeben.