

---

**TP1 - Theoretische Mechanik (StEx LA)**  
**Vorlesungsskript (Stand: 30. Januar 2017)**

---

**Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Newton'schen Mechanik</b>	<b>4</b>
2.1	Raum und Zeit in der klassischen Mechanik . . . . .	5
2.1.1	Mathematischer Exkurs: Vektoren und Matrizen . . . . .	6
2.2	Die Newton'schen Gesetze und ihre Interpretation . . . . .	12
2.2.1	Bahnkurve, Geschwindigkeit und Beschleunigung . . . . .	12
2.2.2	Das 1. Newton'sche Gesetz, Inertialsysteme . . . . .	14
2.2.3	Das 2. Newton'sche Gesetz, Kraft Teil 1. . . . .	16
2.2.4	Das 3. Newton'sche Gesetz, Masse, Kraft Teil 2. . . . .	17
2.2.5	Die Bestimmung von Bahnkurven . . . . .	18
2.2.6	Mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte . . . . .	19
2.3	Einige wichtige Kraftgesetze . . . . .	20
2.4	Der Energiesatz für einen Massenpunkt, konservative Kraftfelder . . . . .	23
2.4.1	Beispiele für konservative Kraftfelder . . . . .	27
2.5	Eindimensionale Bewegungen . . . . .	29
2.5.1	Kraftfelder in einer Raumdimension . . . . .	29
2.5.2	Pendel bei großen Auslenkungen . . . . .	31
2.5.3	Erzwungene Schwingung . . . . .	37
2.6	Mehrere Punktteilchen . . . . .	39
2.6.1	Gesamtimpuls und -erhaltung . . . . .	41
2.6.2	Schwerpunktsbewegung und -satz . . . . .	42
2.6.3	Energieerhaltung . . . . .	43
2.6.4	Drehimpuls und -erhaltung . . . . .	46
2.6.5	Zusammenfassung der Erhaltungsgrößen . . . . .	51
2.7	Das Kepler-Problem . . . . .	52
2.8	Galileitransformationen . . . . .	61
2.9	Bewegung in Nicht-Inertialsystemen . . . . .	66

<b>3</b>	<b>Der Lagrange'sche Zugang zur klassischen Mechanik</b>	<b>72</b>
3.1	Generalisierte Koordinaten, Zwangsbedingungen und Zwangskräfte . . . . .	73
3.2	Virtuelle Verrückungen und das d'Alembert'sche Prinzip . . . . .	80
3.3	Die Lagrange'schen Gleichungen . . . . .	85
3.4	Kanonische Impulse . . . . .	88
3.5	Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen . . . . .	90
3.6	Symmetrien und Erhaltungsgrößen im Lagrange-Formalismus . . . . .	92
3.7	Die Hamiltonfunktion und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen . . . . .	100
<b>4</b>	<b>Schwingungstilgung</b>	<b>104</b>
<b>5</b>	<b>Starre Körper</b>	<b>107</b>
5.1	Die Freiheitsgrade eines starren Körpers . . . . .	107
5.2	Die Trägheitsmomente und die kinetische Energie eines starren Körpers . . . . .	109
5.3	Berechnung von Hauptträgheitsmomenten . . . . .	112
5.4	Bewegungsgleichungen eines starren Körpers . . . . .	113

# 1 Einleitung

Im Gegensatz zur Experimentalphysik wird in der theoretischen Physik das Augenmerk auf den formalen Aufbau und die Grundgleichungen der Physik gelegt. Formaler Aufbau heißt hier, die betrachteten physikalischen Objekte und Begriffe, sowie die Beziehungen zwischen diesen, möglichst präzise zu definieren. Viele dieser Beziehungen lassen sich als mathematische Gleichungen formulieren, deren Form, strukturelle Eigenschaften und Lösungen in der theoretischen Physik untersucht werden. Die Relevanz dieser *Grund*-Gleichungen liegt darin, dass sich viele physikalische Phänomene und experimentell beobachtete Regeln aus diesen Gleichungen ableiten lassen. So lassen sich mit wenigen "Zutaten" ganze Klassen von physikalischen Phänomenen umfassend erklären und verstehen.

Durch ihren vergleichsweise hohen Grad an Abstraktion und der notwendigen Mathematik wird die theoretische Physik oft als vergleichsweise "schwierig" empfunden. Nichtsdestotrotz sind Fortschritte in unserem physikalischen Verständnis der Natur – wie z.B. die kürzlich entdeckten Gravitationswellen – nur durch das Zusammenspiel von experimentellen und theoretischen Untersuchungen möglich.

Diese erste Vorlesung zur Theoretischen Physik soll einerseits einen ersten und wichtigen Einblick in die Arbeits- und Denkweise der theoretischen Physik liefern. Andererseits ist die *Theoretische Mechanik*, – bzw. besser, die *Klassische Mechanik* – wichtig für das Verständnis der *Relativitätstheorie*, *Quantenmechanik* und *Thermodynamik*, deren theoretische Aspekte Thema der folgenden Vorlesungen sind. Zum einen da es teilweise große strukturelle Ähnlichkeiten zwischen der klassischen Mechanik und diesen Gebieten gibt (Relativitätstheorie, Quantenmechanik). Zum anderen bauen diese auf der klassischen Mechanik auf (Thermodynamik) oder erweitern ihre Gültigkeit auf eine größere Klasse von physikalischen Phänomenen und Gegebenheiten (Relativitätstheorie, Quantenmechanik).

Die klassische Mechanik hat eine begrenzte, allerdings sehr große Gültigkeit, die insbesondere viele "Alltagsphänomene" umfasst. Daher ist es nicht verwunderlich, dass sie ihre Anfänge bereits im 17. Jahrhundert nahm, während Relativitätstheorie und Quantenmechanik erst im 20. Jahrhundert entwickelt wurden. Die Gültigkeit der klassischen Mechanik lässt sich wie folgt eingrenzen:

- **Abgrenzung zur Quantenmechanik:** Die klassische Mechanik liefert eine gute Beschreibung, wenn die *De Broglie-Wellenlänge* der betrachteten Teilchen bzw. Körper vernachlässigbar gegenüber den maßgeblichen räumlichen Abständen ist. Die De Broglie-Wellenlänge ist dabei definiert als  $\lambda = h/p$  wobei  $h$  das *Planck'sche Wirkungsquantum* ist und  $p$  der Impuls des Teilchens / Objekts. Die klassische Mechanik liefert also eine gute Beschreibung für die Dynamik vergleichsweise schwerer und nicht zu langsamer Objekte bzw. nicht zu kalter Systeme. Beispiel: Staubkorn  $m = 10^{-6}\text{g}$ ,  $v = 1\text{m/s}$ ,  $\lambda \approx 10^{-26}\text{m} \Rightarrow$  Quanteneffekte vernachlässigbar.
- **Abgrenzung zur speziellen Relativitätstheorie:** Die klassische Mechanik ist gültig für

Situationen in denen die Geschwindigkeit der betrachteten Objekte klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit  $c \approx 3 \times 10^8 \text{m/s}$  ist.

- **Abgrenzung zur allgemeinen Relativitätstheorie:** Die klassische Mechanik ist gültig für nicht zu große und nicht zu stark zeitlich variierende Gravitationskräfte, d.h. für Gravitationskräfte die erzeugt werden von vergleichsweise leichten und sich langsamer als mit Lichtgeschwindigkeit bewegenden Objekten.

Wichtige Anwendungsgebiete der klassischen Mechanik sind u.a.:

- Himmelsmechanik (Kepler'sche Gesetze, ...)
- Technische Mechanik (Statik, Festigkeitslehre, ...)
- Fluiddynamik (Aerodynamik, Hydrodynamik)
- Biomechanik

Einige interessante Anwendungen werden wir im Laufe der Vorlesung diskutieren, z.B.:

- Wie entsteht der Peitschenknall?
- Wenn ich ein (verpacktes) Buch so in die Luft werfe, dass es sich dreht, warum ist die Drehung um zwei der drei vorhandenen ausgezeichneten Achsen stabil aber die um die dritte nicht?
- Wie kann man einen Wolkenkratzer erdbebensicher bauen?

Die zum Verständnis dieser Vorlesung notwendige Mathematik sollte im Prinzip in den Vorlesungen EP1 und EP2 behandelt worden sein. Nichtsdestrotz werden mathematische Sachverhalte wenn möglich vor ihrem Einsatz kurz erläutert und zusammengefasst.

Das vorliegende Skript ist sicher nicht frei von Fehlern. Über entsprechende Hinweise an [thomas-paul.hack@itp.uni-leipzig.de](mailto:thomas-paul.hack@itp.uni-leipzig.de) bin ich dankbar.

## 2 Grundlagen der Newton'schen Mechanik

Ziel der Mechanik ist die quantitative Beschreibung der Bewegung materieller Körper. Dies erfolgt in zwei Schritten:

1. Zuerst wird der formale Rahmen für die quantitative Beschreibung der Lage und Formänderung der Körper festgelegt, die sogenannte *Kinematik*. Im Folgenden sind das Begriffe wie Raum, Zeit, Ort, Bahnkurve, Geschwindigkeit, Beschleunigung.

2. Auf dieser Grundlage wird dann ein Schema bereitgestellt nachdem sich die Bewegung der Körper im Prinzip vollständig berechnen lässt, die sogenannte *Dynamik*. Im einfachsten Fall erfolgt das in Form von *Bewegungsgleichungen*, z.B. solchen die in den Newton'schen Gesetzen formuliert sind.

Wir befassen uns zuerst mit der *Punktmechanik* d.h. der Bewegung einzelner Massenpunkte. Diese sind Idealisierungen ausgedehnter Körper bei denen die Ausdehnung der Körper im Vergleich zu den betrachteten Skalen vernachlässigt werden kann. Dabei werden ebenfalls Vorgänge innerhalb dieser Körper außer Acht gelassen. Beispielsweise kann man für die Beschreibung der Bewegung der Erde um die Sonne die Erde in sehr guter Näherung als Massenpunkt betrachten und dabei z.B. das Wetter und den inneren Aufbau der Erde vernachlässigen.

Später werden wir Systeme von mehreren Massenpunkten betrachten und schließlich ausgedehnte und starre Körper, die sich in einem gewissen Sinne auf Systeme von vielen Massenpunkten zurückführen lassen.

## 2.1 Raum und Zeit in der klassischen Mechanik

In der klassischen Mechanik sind Raum und Zeit unabhängige und absolute Größen. Die Menge aller Zeitpunkte entspricht dabei mathematisch der Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ . Die Angabe eines Zeitpunktes ist universell, d.h. jedem Ereignis kann unabhängig von seiner Position im Raum eine eindeutiger Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  zugeordnet werden und Begriffe wie "gleichzeitig", "vorher" und "nachher" sind sinnvoll. Zeitskala und Zeitnullpunkt sind dabei per Konvention festgelegt. Man kann sich das so vorstellen, dass zwei oder mehrere identisch konstruierte Uhren an einem Ort synchronisiert werden und dann zu unterschiedlichen Orten transportiert werden um an diesen die universelle Zeit zu messen.

In der Relativitätstheorie ist diese Betrachtungsweise nicht mehr sinnvoll. Die sogenannte *Raumzeit* kann nur sinnvoll als kombiniertes Objekt betrachtet werden und die Synchronisation von Uhren ist in der einfachen Form nicht möglich.

Für die mathematische Beschreibung von Orten, d.h. Punkten im Raum, erscheint es eventuell naheliegend, diese durch *Vektoren*  $\vec{r}$  im dreidimensionalen Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  zu beschreiben. Allerdings ist das nicht ganz richtig, da jede Angabe eines Ortes *relativ* ist! Mit anderen Worten, im physikalischen Raum gibt es keinen eindeutig ausgezeichneten Punkt. Um einen Ort im Raum mathematisch zu beschreiben muss man also zunächst einen Punkt  $O$  im physikalischen Raum mit dem Ursprung  $\vec{0} = (0, 0, 0)^T$  im mathematischen Raum  $\mathbb{R}^3$  identifizieren. Um schließlich, wie üblich, einen anderen Punkt im physikalischen Raum  $P$  relativ zum Bezugspunkt  $O$  durch die Angabe dreier Zahlen  $x_1, x_2, x_3$  zu beschreiben muss man zusätzlich eine *Basis*  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  von  $\mathbb{R}^3$  wählen, so dass

$$\vec{OP} = \vec{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

den *Verbindungsvektor* zwischen  $O$  und  $P$  angibt. Das Vier-Tupel  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  definiert also ein *Bezugssystem* oder *Koordinatensystem*. Manchmal wird zwischen diesen beiden Begriffen unterschieden, wobei  $O$  selbst ein Bezugssystem definiert und  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  dann ein Koordinatensystem. In dieser Vorlesung wollen wir der Einfachheit halber die beiden Begriffe synonym verwenden.

### 2.1.1 Mathematischer Exkurs: Vektoren und Matrizen

Wir fassen kurz einige mathematische Sachverhalte zu Vektoren anderen für uns wichtigen Begriffen zusammen.

**Vektoren, Vektorraum** Der Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  ist die Menge aller dreidimensionalen Spaltenvektoren mit reellen Einträgen.

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Vektoren können addiert werden

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Für diese Additionsoperation gilt Symmetrie und das Assoziativgesetz, d.h. für beliebige  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}, \quad (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}).$$

Vektoren können mit einer reellen Zahl – einem Skalar – multipliziert werden

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a\vec{x} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ ax_3 \end{pmatrix}.$$

Für diese Multiplikation gilt das Distributivgesetz, d.h. für beliebige  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}$

$$a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}.$$

Es existiert der Nullvektor

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}.$$

Das negative  $-\vec{x}$  eines Vektors  $\vec{x}$  ist definiert als

$$-\vec{x} = (-1)\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} - \vec{x} = \vec{x} + (-1)\vec{x} = \vec{0}.$$

**Skalarprodukt, Norm, Winkel** Das (euklidische) Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

ist definiert als

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \sum_{i=1}^3 x_i y_i.$$

Das Skalarprodukt hat folgende Eigenschaften für alle  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ ,  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{y} &= \vec{y} \cdot \vec{x} \\ a(\vec{x} \cdot \vec{y}) &= (a\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (a\vec{y}) \\ \vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) &= \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z} \\ (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} &= \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z} \\ \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 &\Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \end{aligned}$$

Mit Hilfe des (euklidischen) Skalarproduktes lässt sich die (euklidische) Norm – die geometrische Länge – eines Vektors definieren

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}.$$

Diese Norm hat folgende Eigenschaften, für beliebige  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ ,  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} |a\vec{x}| &= |a| |\vec{x}|, \\ |\vec{x} + \vec{y}| &\leq |\vec{x}| + |\vec{y}| \quad (\text{Dreiecksungleichung}), \\ |\vec{x} \cdot \vec{y}| &\leq |\vec{x}| |\vec{y}| \quad (\text{Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung}). \end{aligned}$$

Bei der Dreiecksungleichung und Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung gilt Gleichheit nur dann wenn es ein  $a \in \mathbb{R}$  gibt so dass  $\vec{y} = a\vec{x}$  oder  $\vec{x} = a\vec{y}$ , d.h.  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  sind parallel oder  $\vec{x} = \vec{0}$  oder  $\vec{y} = \vec{0}$ .

Für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$  gilt

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| = \cos(\alpha(\vec{x}, \vec{y})) |\vec{x}| |\vec{y}|$$

wobei  $\alpha(\vec{x}, \vec{y})$  der spitze Winkel ( $\leq 90^\circ$ ) zwischen  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  ist<sup>1</sup>. Wenn  $\vec{x} \neq \vec{0}$  und  $\vec{y} \neq \vec{0}$  dann sind  $\vec{x}, \vec{y}$  genau dann *orthogonal* wenn ihr Skalarprodukt verschwindet.

$$\vec{x} \perp \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

---

<sup>1</sup>Definiert man  $\beta(\vec{x}, \vec{y})$  durch  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \cos(\beta(\vec{x}, \vec{y})) |\vec{x}| |\vec{y}|$ , d.h. ohne Betragsstriche auf der linken Seite, dann kann  $\beta(\vec{x}, \vec{y})$  auch Werte zwischen  $90^\circ$  und  $180^\circ$  annehmen, z.B. für Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr zu einer festen Stunde zwischen 3 und 9 Uhr.

**Orthonormalbasen** Ein Tripel  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$  von Vektoren heißt *Orthonormalbasis* (kurz: ONB), falls

$$|\vec{w}_1| = |\vec{w}_2| = |\vec{w}_3| = 1, \quad \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_3 = \vec{w}_2 \cdot \vec{w}_3 = 0.$$

Diese Bedingungen lassen sich kompakt schreiben als

$$\vec{w}_i \cdot \vec{w}_j = \delta_{ij}$$

wobei  $\delta_{ij}$  das *Kronecker-Delta* ist, definiert als

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}.$$

Jeder Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  lässt sich eindeutig als Linearkombination von Basisvektoren schreiben

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 (\vec{w}_i \cdot \vec{x}) \vec{w}_i.$$

Die Standard-ONB des  $\mathbb{R}^3$  bezeichnen wir mit

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Matrizen, Matrixprodukt** Eine Funktion bzw. Abbildung  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt *linear* wenn für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3, a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$T(a\vec{x} + b\vec{y}) = aT(\vec{x}) + bT(\vec{y}).$$

Für lineare Abbildungen schreibt man oft  $T\vec{x}$  anstatt  $T(\vec{x})$ . Hat man eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  gewählt so lassen sich lineare Abbildungen durch Multiplikation eines Vektors mit einer reellen  $3 \times 3$  *Matrix* darstellen bzw. damit identifizieren. Eine solche ist eine quadratische Zahlenanordnung die geschrieben wird als

$$A = (A_{ij})_{i,j=1}^3 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

dabei bezeichnet der linke Index die Zeile und der rechte Index die Spalte der Matrix. Die Anwendung der Matrix  $A$  von links auf einen Vektor  $\vec{x}$  ergibt einen Vektor  $\vec{y}$  definiert als

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = A\vec{x}, \quad y_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij}x_j.$$

Man überprüft leicht, dass  $A$  mittels  $A'(\vec{x}) = A\vec{x}$  eine lineare Abbildung  $A'$  definiert wobei

$$A_{ij} = \vec{e}_i \cdot (A'(\vec{e}_j)).$$

Für zwei Matrizen  $A, B$  ist das Matrixprodukt  $C = AB$  definiert als

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^3 A_{ik} B_{kj}.$$

Das Matrixprodukt kann man sich so vorstellen, dass  $C_{ij}$  das Skalarprodukt der zwei Vektoren ist, die man aus  $i$ -ten Zeile von  $A$  und der  $j$ -ten Spalte von  $B$  erhält. Es gilt für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  und alle Matrizen  $A, B$

$$A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x} = C\vec{x}.$$

Im Gegensatz zum Skalarprodukt ist das Matrixprodukt nicht symmetrisch bzw. kommutativ! D.h. im Allgemeinen gilt

$$AB \neq BA.$$

Ähnlich wie Vektoren lassen sich Matrizen auch addieren und mit Skalaren (reellen Zahlen) multiplizieren. Diese Operationen sind für beliebige  $a, b \in \mathbb{R}^3$  und beliebige Matrizen  $A, B$  definiert als

$$(aA + bB)_{ij} = a(A_{ij}) + b(B_{ij}).$$

Es gilt für beliebige Matrizen  $A, B, C$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} (aA + bB)\vec{x} &= a(A\vec{x}) + b(B\vec{x}) = (aA)\vec{x} + (bB)\vec{x}, \\ (aA + bB)C &= aAC + bBC, \\ C(aA + bB) &= aCA + bCB. \end{aligned}$$

**Die transponierte Matrix, die inverse Matrix** Zu einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

lässt sich mittels

$$(A^T \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (A\vec{y}), \quad \text{für beliebige } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$$

die *transponierte Matrix*  $A^T$  zu  $A$  definieren. In Komponenten gilt

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} \quad \Leftrightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

d.h.  $A^T$  ist die Matrix die man bekommt wenn man Spalten- und Zeilenindizes vertauscht, bzw. die Matrix an der Diagonale mit  $A_{11}, A_{22}, A_{33}$  spiegelt. Es gilt für beliebige Matrizen  $A, B, a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}(aA + bB)^T &= aA^T + bB^T, \\ (AB)^T &= B^T A^T \quad (\text{Reihenfolge beachten!}), \\ (A^T)^T &= A.\end{aligned}$$

Matrizen mit  $A^T = A$  nennt man *symmetrisch*.

Zu bestimmten Matrizen  $A$  (zu allen Matrizen mit nichtverschwindender Determinante) existiert die inverse Matrix  $A^{-1}$  für die gilt

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}, \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei nennt man  $\mathbb{1}$  die *Einheitsmatrix*, es gilt  $A\mathbb{1} = \mathbb{1}A = A$  für jede Matrix  $A$ . Matrizen zu denen ein Inverse existiert nennt man *invertierbar*. Für die inverse Matrix gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned}(aA + bB)^{-1} &\neq aA^{-1} + bB^{-1} \quad (!), \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \quad (\text{Reihenfolge beachten!}), \\ (A^{-1})^{-1} &= A.\end{aligned}$$

**Orthogonale Matrizen, Drehungen, Spiegelungen** Eine Matrix  $A$  heißt *orthogonal*, wenn gilt

$$A^T A = \mathbb{1} = A A^T, \quad \text{d.h.} \quad A^T = A^{-1}.$$

Eine Matrix  $A$  ist orthogonal genau dann wenn für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$  gilt

$$(A\vec{x}) \cdot (A\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y},$$

d.h. die Anwendung von  $A$  auf alle Vektoren erhält die Winkel zwischen beliebigen Paaren von Vektoren und die Länge jedes Vektors. Dies entspricht dem Verhalten von Drehungen um eine Achse oder beliebigen Spiegelungen. Sind  $A, B$  orthogonal, dann sind auch  $A^T, B^T$  und  $AB$  orthogonal.

Zwei Beispiele sind die Matrizen

$$D(3, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S(1, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$D(3, \theta)$  beschreibt die Drehung um die  $\vec{e}_3$ -Achse mit Winkel  $\theta$  und  $S(1, 3)$  beschreibt die Spiegelung an der  $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_3$ -Ebene.

**In anderen Dimensionen ...** All hier diskutierten Begriffe sind direkt verallgemeinerbar zu  $n$  anstatt 3 Dimensionen. U.a. wird es später zweckmäßig sein, die Zeit als zusätzliche Dimension zu berücksichtigen, oder Systeme von  $n$  Teilchen durch  $n \times 3$ -dimensionale Vektoren im  $\mathbb{R}^{3n}$  zu beschreiben.

**Das Kreuzprodukt** Ein wichtiges Produkt von Vektoren, das in der Form nur in 3 Dimensionen sinnvoll ist, ist das *Kreuzprodukt*. Für zwei beliebige Vektoren  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$  ist es definiert als

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt hat folgende Eigenschaften für alle  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= -\vec{y} \times \vec{x} \\ a(\vec{x} \times \vec{y}) &= (a\vec{x}) \times \vec{y} = \vec{x} \times (a\vec{y}) \\ \vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) &= \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z} \\ (\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} &= \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z}. \end{aligned}$$

Aus der Antisymmetrie des Kreuzproduktes unter Vertauschung der Reihenfolge folgt insbesondere für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{x} \times \vec{x} = 0.$$

Vorsicht: das Kreuzprodukt ist nicht *assoziativ*, d.h. im Allgemeinen

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) \neq (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}!$$

Eine wichtige Identität ist die sogenannte "BAC-CAB-Regel": Für beliebige  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$  gilt

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \underbrace{\vec{b}}_{\text{Vektor}} \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{c})}_{\text{Zahl}} - \underbrace{\vec{c}}_{\text{Vektor}} \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{b})}_{\text{Zahl}} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

Für beliebige  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$  wird das *Spatprodukt* aus dem Skalarprodukt und dem Kreuzprodukt konstruiert, das invariant unter zyklischer Vertauschung der Einträge ist:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Aus dieser Identität und der Antisymmetrie des Kreuzproduktes folgt sofort, dass das Kreuzprodukt ein Vektor ist, der senkrecht auf beiden Faktoren senkrecht steht

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{0} = 0, \\ \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{0} = 0. \end{aligned}$$

Es gilt die *Rechte-Hand-Regel*: wenn man aus Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger ein rechtwinkliges Dreiein formt, dann zeigt der Daumen in Richtung von  $\vec{a}$ , der Zeigefinger in Richtung

von  $\vec{b}$  und der Mittelfinger in Richtung von  $\vec{a} \times \vec{b}$ . Außerdem gilt, dass der Betrag von  $\vec{a} \times \vec{b}$  der Fläche des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms ist

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sin(\alpha(\vec{a}, \vec{b})) |\vec{a}| |\vec{b}|,$$

wobei  $\alpha(\vec{a}, \vec{b})$  wie zuvor der spitze Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist.

Aufbauend auf dieser geometrischen Interpretation des Kreuzproduktes folgt, dass das Spatprodukt  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  dem Volumen des durch die drei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  aufgespannten Parallelepipeds entspricht.

Drückt man Vektoren bezüglich der Standard-ONB des  $\mathbb{R}^3$  aus – was wir bis auf einige Ausnahmen immer tun werden – dann lässt sich das Kreuzprodukt bequem schreiben als

$$\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})_i}_{i\text{-te Komponente von } \vec{a} \times \vec{b}} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k,$$

wobei  $\epsilon_{ijk}$  der total antisymmetrische *Levi-Civita-Tensor* ist:

$$\epsilon_{123} = 1, \quad \epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}, \quad \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}.$$

D.h.  $\epsilon_{ijk}$  ist antisymmetrisch unter Vertauschung von beliebigen zwei Indizes und damit entweder = 1 (für  $ijk$  zyklische Permutation von 123), = -1 (für  $ijk$  zyklische Permutation von 321), oder = 0 (sonst, d.h. wenn zwei der drei Indizes gleich sind).

Aus dieser kompakten Schreibweise des Kreuzproduktes kann man seine oben aufgeführten Eigenschaften, z.B. Antisymmetrie des Kreuzproduktes und Zyklizität des Spatproduktes leicht ablesen.

## 2.2 Die Newton'schen Gesetze und ihre Interpretation

### 2.2.1 Bahnkurve, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Wir sind daran interessiert die Dynamik eines Massenpunktes theoretisch zu beschreiben. Zu jedem Zeitpunkt  $t$  befindet sich dieser Massenpunkt an einem bestimmten Punkt  $P(t)$  im physikalischen Raum den wir relativ zu einem Bezugssystem  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  durch einen Vektor  $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP(t)} \in \mathbb{R}^3$  beschreiben können. Die Menge dieser Punkte  $P(t)$  für alle Zeiten  $t$  in einem Intervall  $t \in (t_0, t_1)$ , das der Zeitdauer entspricht für die wir die Bewegung des Massenpunktes beschreiben wollen, nennt man die *Bahnkurve* des Massenpunktes.

Legt man einen Bezugspunkt  $O$  fest und steht der Massenpunkt bezüglich  $O$  nicht still dann ist die Bahnkurve aus Sicht von  $O$  ein eindimensionales Objekt, z.B. eine Gerade, eine Spirale oder ein Kreis, beschrieben durch die Menge aller  $\vec{r}(t)$  für alle  $t \in (t_0, t_1)$ . Dieses Objekt ist

unabhängig von einer gewählten ONB und abstrakt gesprochen kann man sich die Bahnkurve sogar als unabhängig vom Bezugspunkt  $O$  selbst vorstellen. In der Praxis wollen wir aber natürlich die Bahnkurve relativ zu einem Bezugssystem  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  betrachten, dann liefern die Koordinatenfunktionen  $x_i(t)$  definiert durch

$$\overrightarrow{OP}(t) = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad x_i(t) = \vec{e}_i \cdot \vec{r}(t),$$

- sofern wir ein zeitunabhängiges Bezugssystem betrachten - eine vollständige Beschreibung der Bahnkurve. Mathematisch ist  $\vec{r}(t)$  eine Funktion von  $(t_0, t_1)$  nach  $\mathbb{R}^3$

$$\vec{r}(t) : (t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Wollen wir die Bewegung des Massenpunktes "zu allen Zeiten" beschreiben, dann wählen wir als Zeitintervall die ganze reelle Achse  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ .

Zu einer Bahnkurve können wir eine Geschwindigkeit(-skurve)  $\vec{v}(t)$  und eine Beschleunigung(-skurve)  $\vec{a}(t)$  definieren, indem wir die Koordinatenfunktionen einmal bzw. zweimal nach der Zeit ableiten.

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} x_1(t) \\ \frac{d}{dt} x_2(t) \\ \frac{d}{dt} x_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} x_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} x_2(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} x_3(t) \end{pmatrix}$$

Die Schreibweise " $\dot{\quad}$ " für eine Zeitableitung " $\frac{d}{dt}$ " geht dabei auf Newton zurück (die letztere auf Leibniz).

Wir erinnern uns daran, dass die Ableitung einer Funktion  $f$  von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  definiert ist als

$$\frac{d}{dt} f(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(t + \tau) - f(t)}{\tau}.$$

$\frac{d}{dt} f(t)$  gibt dabei anschaulich die Steigung der Tangenten an der Funktion am Punkt  $(t, f(t))$  an, während  $\frac{d^2}{dt^2} f(t)$  die Änderung dieser Steigung, d.h. die Krümmung an diesem Punkt angibt. Die Definitionen von  $\vec{v}(t)$  und  $\vec{a}(t)$  entsprechen also der physikalischen Vorschrift zur Messung von Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Betrachtet man nur zeitlich konstante Bezugssysteme, dann sind Geschwindigkeit und Beschleunigung unabhängig vom gewählten Bezugssystem. Im allgemeinen hängen diese Größen aber vom Bezugssystem ab.

## 2.2.2 Das 1. Newton'sche Gesetz, Inertialsysteme

Das erste Newton'sche Gesetz (oder Axiom), auch Trägheitsgesetz genannt, geht tatsächlich auf Galilei zurück, der ein Jahr starb (1642) bevor Newton geboren wurde (1643). Zum einen beschreibt es die unter Umständen verblüffende Aussage, dass der "Normalzustand" eines Körpers ohne äußere Krafteinwirkung nicht der Stillstand sondern die geradlinig gleichförmige Bewegung ist. Die Aussage ist deswegen verblüffend weil im Alltag eine vollständig kräftefreie Umgebung praktisch nicht existiert.

Die bekannteste Formulierung ist sicherlich die folgende:

### 1. Newton'sches Gesetz (1. Fassung):

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange keine Kraft auf ihn einwirkt.

Diese Formulierung ist allerdings aus zwei Gründen problematisch:

1. Die Begriffe "Ruhe" und "gleichförmig geradlinige Bewegung" hängen vom Bezugssystem ab. Eine Mutter ist z.B. aus Sicht ihres Karusell-fahrenden Kindes in nicht-gleichförmiger und nicht-gradliniger Bewegung.
2. Der Begriff "Kraft" muss erst einmal sauber definiert werden. Bei der theoretischen Beschreibung der Bewegung eines Massenpunktes stehen wir sozusagen "am Anfang" und "wissen" noch gar nicht was "Kraft" ist. Wir "kennen" bislang nur die Begriffe "Raum", "Zeit", "Bezugssystem", "Bahnkurve", "Geschwindigkeit" und "Beschleunigung". Natürlich haben wir eine gute Intuition für den Begriff der "Kraft", und sollten diese in die Definition des Begriffs einfließen lassen.

Unsere Erfahrung besagt, dass Umgebungseinflüsse mit dem Abstand abnehmen und für Abstände gegen unendlich gegen Null gehen. Das zweite Problem können wir also mit der folgenden Formulierung (nach Kuypers) umgehen.

### 1. Newton'sches Gesetz (2. Fassung):

Jeder Körper, der von allen anderen unendlich weit entfernt ist, der also keine Umgebung hat, verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung.

Diese Formulierung leidet immer noch unter dem als erstes angesprochenen Problem der Bezugssystemabhängigkeit. Die beste und einfachste Lösung scheint also zu sein, dass wir postulieren, dass die Aussage nur in bestimmten Bezugssystemen gilt. Das führt uns zu folgender endgültigen Formulierung (nach Kuypers).

### 1. Newton'sches Gesetz (3. und finale Fassung):

Es gibt Bezugssysteme, in denen sich alle Körper, die keine Umgebung haben, gleichförmig und geradlinig bewegen oder ruhen.

Diese Bezugssysteme nennt man *Inertialsysteme* (lateinisch: inertia = Trägheit). Es zeigt sich, dass Bezugssysteme die relativ zum Fixsternhimmel in Ruhe sind, in guter Näherung Inertialsysteme sind. Ein erdfestes Bezugssystem ist wegen der Rotation (= beschleunigte Bewegung) der Erde um die Sonne und der Erdrotation selbst kein gutes Inertialsystem, es sei denn wir betrachten nur Zeitskalen die klein gegenüber diesen Rotationszeitskalen sind. Solche rotierenden Bezugssysteme werden wir später noch im Detail diskutieren.

Ist  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  ein Inertialsystem so ist z.B.  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  ebenfalls ein Inertialsystem wenn es sich relativ zu  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  gleichförmig und geradlinig bewegt, d.h.

$$\overrightarrow{O'O}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0,$$

wobei  $\vec{v}_0$  die Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme ist. Dann gilt für die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  im Bezugssystem  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  und die Bahnkurve  $\vec{r}'(t)$  im Bezugssystem  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  folgende Relation

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0.$$

Diese "Umschreibung" bzw. *Transformation* von einem Inertialsystem zu einem anderen nennt man *Galileitransformation*. Es gibt noch weitere Möglichkeiten ein Inertialsystem in ein anderes zu überführen, d.h. noch mehr Arten von Galileitransformationen. Wir werden diese später diskutieren.

In der Mechanik gilt das Relativitätsprinzip:

Relativitätsprinzip:

Alle Inertialsysteme sind physikalische gleichwertig, d.h. es ist nicht möglich durch mechanische Messungen ein bestimmtes Inertialsystem auszuzeichnen.

Konkret heißt das, dass die physikalischen Gesetze bzw. Bewegungsgleichungen in allen Inertialsystemen dieselbe *Form* haben. Etwas formaler spricht man davon, dass diese Gleichungen invariant unter Galileitransformationen sind.

### 2.2.3 Das 2. Newton'sche Gesetz, Kraft Teil 1.

Das 2. Newton'sche Gesetz besagt, dass jede Abweichung von einer geradlinig gleichförmigen Bewegung eine Kraft als Ursache hat. Dazu definieren wir zunächst einmal den *Impuls*  $\vec{p}$

$$\vec{p} = m\vec{v},$$

wobei  $m$  die Masse des Partikelchen ist und  $\vec{v}$  seine Geschwindigkeit. Das 2. Newton'sche Gesetz besagt nun, dass die zeitliche Ableitung des Impulses gleich der Kraft ist. Im Prinzip geht in die Zeitabhängigkeit von  $\vec{p}$  sowohl jene von  $m$  als auch die von  $\vec{v}$  ein; ein Beispiel für eine zeitabhängige Masse ist z.B. die Masse einer fliegenden Rakete. In den allermeisten Fällen werden wir aber eine konstante Masse betrachten.

2. Newton'sches Gesetz:

In allen Inertialsystemen gilt

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \stackrel{m \text{ konstant}}{=} m \frac{d}{dt}\vec{v} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F}.$$

Wir überprüfen kurz, ob das 2. Newton'sche Gesetz mit dem Relativitätsprinzip vereinbar ist. Wie zuvor betrachten wir zwei Inertialsysteme  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  und  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  so dass

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0.$$

Wir berechnen zunächst die Geschwindigkeit in beiden Systemen.

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \dot{\vec{r}}(t) \\ \vec{v}'(t) &= \dot{\vec{r}}'(t) = \frac{d}{dt}(\vec{r}(t) + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0) = \vec{v}(t) + \vec{v}_0 \end{aligned}$$

Und nun die Beschleunigungen.

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \dot{\vec{v}}(t) \\ \vec{a}'(t) &= \dot{\vec{v}}'(t) = \frac{d}{dt}(\vec{v}(t) + \vec{v}_0) = \vec{a}(t) \end{aligned}$$

Die Beschleunigung ist also in beiden Systemen gleich! Insbesondere gilt das 2. Newton'sche Gesetz im System  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  genau dann wenn es im System  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  gilt. Dafür muss

$\vec{a}$  nicht in beiden Bezugssystemen gleich sein. Allerdings muss sich die Kraft  $\vec{F}$  beim Wechsel von einem Inertialsystem zum anderen genauso ändern wie die Beschleunigung  $\vec{a}$ , damit das Relativitätsprinzip gilt. Das ist tatsächlich für alle Galileitransformationen der Fall, wie wir später sehen werden.

Das 2. Newton'sche Gesetz gilt auch in Nicht-Inertialsystemen wenn man sogenannte "Scheinkräfte" berücksichtigt. Beispiele für Scheinkräfte sind die Zentrifugal- und Korioliskraft in rotierenden Bezugssystemen, die wir später noch ausführlich diskutieren werden.

Da wir vor dem Aufstellen des 2. Newton'schen Gesetzes ja nicht "wussten" was "Kraft" ist, müssen wir dieses Gesetz zunächst einmal als eine *Definition* der Größe  $\vec{F}$  ansehen. Der Begriff der "(trägen) Masse"  $m$ , der im Gesetz auftaucht, ist ebenfalls noch nicht "bekannt" und durch das 2. Gesetz in der Form auch nicht direkt definiert. In beiden Fällen schafft das 3. Newton'sche Gesetz Abhilfe.

### 2.2.4 Das 3. Newton'sche Gesetz, Masse, Kraft Teil 2.

Das 3. Newton'sche Gesetz ist eine Aussage über die Relationen von Kräften zwischen zwei Körpern.

3. Newton'sches Gesetz:

Übt ein Körper 1 auf einen anderen Körper 2 die Kraft  $\vec{F}_{12}$  aus, so übt der 2. Körper auf den 1. die Kraft  $\vec{F}_{21}$  aus, die vom Betrage gleich ist, aber die entgegengesetzte Richtung hat ("action = reactio"):

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}.$$

Mit diesem Gesetz lässt sich eine *Vorschrift* bzw. *Definition* der Masse  $m$  angeben. Dazu betrachten wir die Situation, dass in einem Inertialsystem zwei Punktmassen mit konstanter Masse Kräfte aufeinander ausüben und sonst keine weiteren Körper und Kräfte im Spiel sind. Dann gilt<sup>2</sup>

$$m_1 |\ddot{\vec{r}}_1(t)| = m_1 |\vec{a}_1(t)| = |\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}| = m_2 |\vec{a}_2(t)| = m_2 |\ddot{\vec{r}}_2(t)| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{|\vec{a}_1(t)|}{|\vec{a}_2(t)|}.$$

Durch die Messung der beiden Beschleunigungen in einem Inertialsystem haben wir also die Relation der Massen festgelegt. Damit sind *alle* Massen bis auf eine Einheit, die international per Konvention festgelegt wird, bestimmt.

<sup>2</sup>Hier nehmen wir an, dass Massen immer positiv sind, was sich mit dem 2. und 3. Newton'schen Gesetz auch verifizieren lässt.

Darauf aufbauend können wir nun dem Begriff der Kraft operationell einen Sinn geben und das 2. Newton'sche Gesetz praktisch anwendbar machen indem wir seinen Status als bloße Definition der Kraft  $\vec{F}$  verbessern. Und zwar betrachten wir eine begrenzte Anzahl von Bahnkurven einzelner Test-Punktmassen mit bekannter Masse. Durch die Messung der Beschleunigungen dieser Bahnkurven in Inertialsystemen können wir die vorhandene Kraft mit einer gewissen Präzision ausmessen. D.h. wir *postulieren* eine *universelle* Kraft  $\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$ , die derart ist, dass für jede dieser Testmessungen  $m\vec{a}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$  erfüllt ist.

Anschließend können wir mit dem 2. Newton'schen Gesetz im Prinzip vorhersagen, wie die Bewegung jeder weiteren Testmasse unter dem Einfluss der nun bekannten Kraft  $\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$  aussehen wird.

### 2.2.5 Die Bestimmung von Bahnkurven

Im vorigen Abschnitt haben wir Aufgrund des 2. Newton'schen Gesetzes postuliert, dass jede beschleunigte Bewegung in einem Inertialsystem eine Kraft  $\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$  als Ursache hat, d.h. wir haben angenommen, dass die Kraft die auf eine Punktmasse wirkt von

1. dem Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  der Punktmasse,
2. dem Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}(t)$  der Punktmasse
3. und dem Zeitpunkt  $t$

abhängt. Das ist in dem Sinne eine Annahme, als dass die Kraft auf die Punktmasse im Prinzip von der gesamten "Geschichte", d.h. Bahnkurve des Teilchens, abhängen kann und nicht nur von seinem "aktuellen Zustand". In der Praxis sind aber Kräfte in den meisten Fällen von der Form  $\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$ . Einige Beispiele werden wir im Folgenden diskutieren.

In dem noch einfacheren und oft realisierten Fall, dass die Kraft sogar von der Form  $\vec{F}(\vec{r}(t), t)$  oder  $\vec{F}(\vec{r}(t))$  ist, d.h. nur von dem Ort des Punkteilchens abhängt und evtl. noch von der Zeit, aber nicht von der Geschwindigkeit des Teilchens, spricht man von einem *Kraftfeld*  $\vec{F}(\vec{r}(t))$  bzw. einem *zeitabhängigen Kraftfeld*  $\vec{F}(\vec{r}(t), t)$ . In diesem Fall ist mathematisch die Kraft eine Funktion  $\vec{F}(\vec{r})$  von  $\mathbb{R}^3$  nach  $\mathbb{R}^3$  bzw. eine Funktion  $\vec{F}(\vec{r}, t)$  von  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  nach  $\mathbb{R}^3$ , die dann auf der Bahnkurve des Teilchens "ausgewertet" wird. Physikalisch heißt das, dass an jedem Punkt im Raum und zu jeder Zeit eine universelle und bestimmte Kraft existiert, die auf alle Punktmassen, die sich zu dieser Zeit an diesem Ort aufhalten wirkt.

Ist die Kraft  $\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$  bekannt, wird das 2. Newton'sche Gesetz mathematisch zu einer *Differentialgleichung* für die Bahnkurve einer Punktmasse

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = m\vec{a}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t). \quad (1)$$

Da die höchste vorhandene Zeitableitung in dieser Gleichung zweiter Ordnung ist, spricht man von einer (*gewöhnlichen*) *Differentialgleichung zweiter Ordnung*. In der klassischen Mechanik ist

das Ziel das Lösen dieser Differentialgleichung, d.h. die Bestimmung einer Funktion  $\vec{r}(t)$  die bei bekannter Kraft  $\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$  diese Gleichung erfüllt. Abhängig von der Form der Kraftfunktion  $\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$  gibt es verschiedene mathematische Verfahren zur Lösung dieser Gleichung, die wir zum Teil in der Vorlesung besprechen werden. Ganz allgemein ist jedoch aus der Mathematik die folgende Tatsache bekannt.

Für jede Kraftfunktion  $\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$  existiert eine eindeutige Lösung der Gleichung (1) sobald man den Ort  $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$  und die Geschwindigkeit  $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$  zu einem festen aber beliebig gewählten Anfangszeitpunkt  $t = t_0$  vorgegeben hat.

Dies entspricht der aus der Erfahrung bekannten Tatsache, dass die Bewegung eines Punktteilchens nicht nur von der einwirkenden Kraft abhängt, sondern auch vom Ort und der Geschwindigkeit des Teilchens zum Zeitpunkt an dem die Bewegung beginnt. Zum Beispiel hängt die Wurfbahn eines Balles eindeutig vom Abwurfort und der Abwurfgeschwindigkeit ab.

## 2.2.6 Mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte

Im Kontext der Newton'schen Gesetze gibt es eine weitere wichtige Tatsache, die von solcher Bedeutung ist, dass manche vom 4. Newton'schen Gesetz sprechen:

Wirken auf einen Körper mehrere verschiedene Kräfte  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_k$  so ist ihre Wirkung derart, dass die resultierende Gesamtwirkung aller dieser Kräfte durch die Gesamtkraft

$$\vec{F}_{\text{ges.}} = \sum_{i=1}^k \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_k$$

gegeben ist. Insbesondere wirkt jede Kraft immer gleich, unabhängig davon ob noch andere Kräfte vorhanden sind.

Mathematisch bedeutet diese Aussage einfach, dass jede Kraft in einem Bezugssystem sich durch einen Vektor beschreiben lässt, was wir natürlich bislang implizit immer angenommen haben.

## 2.3 Einige wichtige Kraftgesetze

Es zeigt sich, dass viele der beobachteten Kräfte zwischen ausgedehnten Körpern sich auf einige wenige und vergleichsweise einfache Kraftgesetze bzw. -funktionen für einzelne Massenpunkte zurückführen lassen. Im Folgenden wollen wir einige diskutieren. Wie zuvor machen wir den Ansatz  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$ .

**Homogene Kraftfelder** Der einfachste Fall ist ein räumlich und zeitlich konstantes Kraftfeld

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}(t), t) = \vec{F}_0.$$

In der Praxis kann man Kräfte auf kleinen räumlichen und zeitlichen Skalen oft gut durch ein homogenes Kraftfeld beschreiben. Das beste Beispiel ist wohl das Schwerfeld der Erde, das für räumliche Ausdehnungen im Kilometerbereich und für große Zeiten homogen ist.

Die allgemeinste Lösung der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_0$$

können wir in diesem einfachen Fall sofort angeben:

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2m}\vec{F}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0, \quad (2)$$

wobei  $\vec{v}_0$  und  $\vec{r}_0$  Anfangsgeschwindigkeit und Anfangsort zum hier als Anfangszeitpunkt gewählten Zeitpunkt  $t = t_0 = 0$  sind. Insbesondere ist  $\vec{r}(t)$  eindeutig bestimmt wenn  $\vec{v}_0$  und  $\vec{r}_0$  fest vorgegeben sind. An der Form der Lösung (2) kann man ebenfalls nochmals verifizieren dass die kräftefreie Bewegung ( $\vec{F}_0 = 0$ ) in Inertialsystemen geradlinig und gleichförmig ( $\vec{v}_0 \neq \vec{0}$ ) oder der Stillstand ( $\vec{v}_0 = 0$ ) ist.

Die Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichung für den Fall, dass die Kraft  $\vec{F} = \vec{F}(t)$  räumlich homogen aber nicht zeitabhängig ist lässt sich ebenfalls direkt angeben:

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{m} \int_0^t \int_0^{t'} \vec{F}(t'') dt'' dt' + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0. \quad (3)$$

Wie bereits erwähnt ist aus der Mathematik bekannt, dass Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für vorgegebene Anfangsorte und -geschwindigkeiten ("Anfangsdaten") eindeutig sind. Es genügt also zu überprüfen, dass (3) eine Lösung von

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(t)$$

ist bei der die Anfangsdaten frei vorgegeben werden können um zu verifizieren dass (3) die allgemeinste Lösung der obigen Differentialgleichung ist. Um das zu überprüfen verwendet man den bekannten Sachverhalt aus der Analysis dass für eine (stetige) Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und für beliebiges  $t_0$  gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(t') dt' = f(t),$$

wobei wir die "Integrationszeit" als  $t'$  schreiben um sie von der oberen Integrationsgrenze  $t$  zu unterscheiden. In diesem Sinne ist das Integral die "Umkehrung" der Ableitung. Wendet man diese Beziehung auf die Funktion

$$g_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t f(t') dt'$$

an, also eine mögliche Stammfunktion von  $f$ , dann bekommt man für beliebiges  $t_0$

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t g_{t_0}(t') dt' = g_{t_0}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} f(t'') dt'' dt' = f(t)$$

Daraus folgt, dass (3) eine Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichung für die Kraft  $\vec{F} = \vec{F}(t)$  ist, wenn wir uns klarmachen, dass das Integral einer vektorwertigen Funktion analog zur Ableitung komponentenweise gemeint ist

$$\int_{t_0}^t \vec{F}(t') dt' = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^t F_1(t') dt' \\ \int_{t_0}^t F_2(t') dt' \\ \int_{t_0}^t F_3(t') dt' \end{pmatrix}.$$

Um schließlich zu verifizieren, dass (3) eine Lösung zu den beliebig vorgebbaren Anfangsdaten  $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ ,  $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$  ist, müssen wir uns nur klarmachen, dass für eine beliebige (stetige) Funktion  $f$  und ein beliebiges  $t_0$  gilt

$$\int_{t_0}^{t_0} f(t') dt' = 0.$$

**Lineare / Harmonische Kraftfelder** Ein weiterer einfacher und wichtiger Fall ist ein Kraftfeld das proportional zum Ortsvektor ist, d.h.

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$$

mit einer Konstante  $k$  die typischerweise  $> 0$  ist. Dieses Kraftgesetz beschreibt u.a. die rücktreibende Kraft bei einer aus der Gleichgewichtslage ausgelenkten Feder oder bei einem aus der Gleichgewichtslage ausgelenkten Pendel - jeweils für nicht zu große Auslenkungen. Die Lösungen der entsprechenden Newton'schen Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -k\vec{r}(t)$$

sind leicht als Linearkombinationen von  $\sin$  und  $\cos$  anzugeben und beschreiben Schwingungen um die Ruhelage bzw. Gleichgewichtslage. Enthält die Kraft zusätzlich noch einen räumlich homogenen aber zeitabhängigen Beitrag  $\vec{f}(t)$  dann werden die Lösungen von

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -k\vec{r}(t) + \vec{f}(t)$$

komplizierter und man spricht von einer *erzwungenen Schwingung* in der z.B. Resonanzeffekte auftreten können. Das klassische Beispiel ist eine Brücke, die ins Schwanken gerät und einstürzt wenn Soldaten im Gleichschritt darüber marschieren. Mehr dazu später.

**Die Gravitationskraft** Newton hat erkannt, dass die Gravitationskraft eine Kraft ist, die von allen massiven Körpern auf andere massive Körper ausgeübt wird und sich auf ein einfaches universales Kraftgesetz zurückführen lässt. Das von ihm postulierte Kraftgesetz ist so genau, dass es Jahrhunderte gedauert hat, bis Abweichungen davon gemessen wurde und daher ein verallgemeinertes Kraftgesetz – aus der Einstein’schen allgemeinen Relativitätstheorie – postuliert werden musste, um alle Beobachtungen genau zu beschreiben.

Die erste Beobachtung ist, dass die Gravitationskraft  $\vec{F}_m$  die auf ein Teilchen der Masse  $m$  wirkt proportional zu  $m$  ist

$$\vec{F}_m = m\vec{G}.$$

D.h. dass sich die Masse  $m$  aus der Newton’schen Bewegungsgleichung für das betrachtete Punktteilchen herauskürzt.

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_m \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = \vec{G}.$$

Diese Identität der *trägen Masse* – auf der linken Seite der Newton’schen Bewegungsgleichung – und der *schweren Masse* – auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung – ist zunächst einmal eine *Annahme*, die experimentell mit einer Genauigkeit von  $10^{-13}$  überprüft worden ist (Eötvash-Gruppe, 1999). Experimente, die das auf  $10^{-18}$  verbessern können sind in Arbeit (STEP-Satellit)<sup>3</sup>.

Newton’s universelles Kraftgesetz beschreibt die Kraft zwischen zwei Punktteilchen mit Massen  $m_1$  und  $m_2$ . Wenn  $P_1$  und  $P_2$  die Orte dieser Teilchen sind, dann sei

$$\vec{r} = \overrightarrow{P_1P_2}$$

der entsprechende Verbindungsvektor. Die Kraft die der Massenpunkt mit  $m_2$  auf den Massenpunkt mit  $m_1$  ausübt ist dann

$$\vec{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad r = |\vec{r}| \quad \vec{r} = \overrightarrow{P_1P_2}. \quad (4)$$

Dabei ist  $G$  die *Gravitationskonstante*

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}.$$

Offenbar zeigt die Kraft in Richtung des Verbindungsvektors, ist anziehend (Teilchen 1 wird in Richtung von Teilchen 2 beschleunigt) und fällt wie  $r^{-2}$  mit dem relativen Abstand  $r$  ab.

Wie wir später sehen werden ist die Beschleunigung der 1. Punktmasse im Schwerpunktsystem proportional zum Verhältnis  $m_2/(m_1 + m_2)$  und umgekehrt. Ist also z.B.  $m_2 \gg m_1$ , dann können wir die 2. Punktmasse im Schwerpunktsystem in sehr guter Näherung als ruhend ansehen und die *innere Gravitationskraft* im System der beiden Teilchen unter Vernachlässigung der Wirkung von Teilchen 1 auf Teilchen 2 als *äußere Gravitationskraft* für das Teilchen 1 betrachten. Das ist natürlich der Fall für Bewegungen im Schwerfeld der Erde. Durch Einsetzen von Erdmasse und Erdradius in (4) und Vernachlässigung der vertikalen Bewegung eines Punktteilchens im Vergleich zum großen Erdradius erhalten wir das bekannte Gesetz

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} \quad g = |\vec{g}| = 9.81 \text{ms}^{-2}.$$

<sup>3</sup>Genaugenommen wird untersucht ob träge und schwere Masse für alle Körper *proportional* sind mit einem universellen Proportionalitätsfaktor. Dieser wird per Konvention dann auf 1 festgelegt.

**Die Coulombkraft** Die Kraft zwischen zwei elektrisch geladenen ruhenden Punktteilchen wird durch ein Kraftgesetz beschrieben, dass dem Gravitationsgesetz verblüffend ähnlich ist. Es gilt

$$\vec{F}_{21} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r} \quad r = |\vec{r}| \quad \vec{r} = \overrightarrow{P_1 P_2}. \quad (5)$$

wobei  $q_1$  und  $q_2$  die jeweiligen Ladungen sind und

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1.126 \times 10^{-10} \text{ CV}^{-1}\text{m}^{-1}.$$

Im Gegensatz zur Gravitationskraft stoßen sich gleichnamige Ladungen ab, und es existieren positive und negative Ladungen während Massen durchweg positiv sind. Obwohl die Coulombkraft stärker ist – die abstoßende Coulombkraft zwischen zwei Protonen ist in etwa  $10^{36}$  mal stärker als die anziehende Gravitationskraft zwischen ihnen – ist auf makroskopischen Skalen die Gravitationskraft dominant weil sie nicht “durch negative Massen neutralisiert” werden kann.

**Geschwindigkeitsabhängige Kräfte: Lorentzkraft, Reibungskraft** Bis jetzt haben wir nur Kraftfelder betrachtet, d.h. geschwindigkeitsunabhängige Kräfte. Es gibt aber auch wichtige geschwindigkeitsabhängige Kräfte. Ein Beispiel ist die Kraft, die auf eine bewegte Punktladung mit Ladung  $q$  in einem äußeren Magnetfeld  $\vec{B}$  ausgeübt wird, die *Lorentzkraft* (im engeren Sinne)

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) = q \dot{\vec{r}}(t) \times \vec{B}(\vec{r}(t)).$$

Ein weiteres Beispiel ist die Reibungskraft

$$\vec{F} = \vec{F}(\dot{\vec{r}}(t)) = -\kappa \dot{\vec{r}}(t) \quad \kappa > 0,$$

wobei die einfache Form, d.h. die Proportionalität zur Geschwindigkeit, experimentell für kleine Geschwindigkeiten festgestellt worden ist.

## 2.4 Der Energiesatz für einen Massenpunkt, konservative Kraftfelder

Wir betrachten die Newton'sche Bewegungsgleichung in einem zeitunabhängigen Kraftfeld.

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

Wir multiplizieren beide Seiten skalar mit der Geschwindigkeit.

$$m\ddot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

Wir wollen diese Gleichung nun integrieren von  $t_1$  bis  $t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt. \quad (6)$$

Das Integral auf der linken Seite von (6) können wir direkt ausführen. Dazu definieren wir die *kinetische Energie*

$$T = T(\dot{\vec{r}}(t)) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}(t)^2 = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

Es gilt (Produktregel)

$$\frac{d}{dt}T = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}(t)^2 = m\ddot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t).$$

Die kinetische Energie ist also eine Stammfunktion für die linke Seite und es gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}T(\dot{\vec{r}}(t)) dt = T(\dot{\vec{r}}(t_2)) - T(\dot{\vec{r}}(t_1)).$$

Um die rechte Seite von (6) zu berechnen schreiben wir den Ausdruck um

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt$$

indem wir

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt$$

verwenden.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt = \int_{C(\vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2))} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Die Rechte Seite ist wie folgt zu interpretieren: "Integriere  $\vec{F}(\vec{r})$  entlang des Weges (der Kurve)  $C(\vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2))$  die bei  $\vec{r}(t_1)$  beginnt und bei  $\vec{r}(t_2)$  endet und deren Form / Lage durch die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  relativ zum gewählten Bezugssystem gegeben ist." Mathematisch handelt es sich dabei um ein sogenanntes *Wegintegral* oder *Kurvenintegral*. Physikalisch interpretieren wir das Wegintegral als *die durch die Kraft  $\vec{F}$  am Teilchen geleistete Arbeit auf dem Weg  $C(\vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2))$* . Mathematisch und physikalisch von Bedeutung ist die Tatsache, dass diese im Allgemeinen *von dem gesamten Weg  $C(\vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2))$  abhängt und nicht nur von Anfangs und Endpunkt dieses Weges*.

Wir bekommen also folgenden allgemeinen Energiesatz

Die Änderung der kinetischen Energie einer Punktmasse ist gleich der von der äußeren Kraft geleisteten Arbeit.

Eine konkretere Aussage kann man treffen, wenn die Arbeit sehr wohl vom Weg unabhängig ist, was oft der Fall ist. In diesem Fall spricht man von einem *konservativen Kraftfeld*  $\vec{F}(\vec{r})$ . Mit anderen Worten ist ein konservatives Kraftfeld eins, bei dem das Wegintegral

$$W(\vec{F}(\vec{r}), C(\vec{r}_1, \vec{r}_2)) = \int_{C(\vec{r}_1, \vec{r}_2)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

von für alle Kurven im  $\mathbb{R}^3$  mit Startpunkt  $\vec{r}_1$  und Endpunkt  $\vec{r}_2$  gleich ist. Man spricht davon, dass die vom Kraftfeld geleistete Arbeit wegunabhängig ist. Das ist gleichbedeutend damit, dass die geleistete Arbeit entlang jedes geschlossenen Weges verschwindet. Um das zu sehen betrachten wir zwei Wege  $C_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ ,  $C_B(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  mit gleichem Start- und Endpunkt. Mit  $-C_B(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$  bezeichnen wir den Weg, den wir erhalten wenn wir den Weg  $C_B(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  in umgekehrter Richtung ablaufen. Für die Arbeit gilt

$$W(\vec{F}(\vec{r}), C_B(\vec{r}_1, \vec{r}_2)) = \int_{C_B(\vec{r}_1, \vec{r}_2)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{-C_B(\vec{r}_2, \vec{r}_1)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -W(\vec{F}(\vec{r}), -C_B(\vec{r}_2, \vec{r}_1)).$$

Das folgt aus der Tatsache dass für eine Funktion  $f$  von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = - \int_{t_2}^{t_1} f(t) dt$$

gilt. Wir bezeichnen nun mit  $C_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cup -C_B(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$  den geschlossenen Weg, den wir erhalten indem wir entlang  $C_A$  von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  gehen und anschließend entlang  $-C_B$  von  $\vec{r}_2$  nach  $\vec{r}_1$ . Für die geleistete Arbeit gilt

$$\begin{aligned} W(\vec{F}(\vec{r}), C_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cup -C_B(\vec{r}_2, \vec{r}_1)) &= W(\vec{F}(\vec{r}), C_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2)) + W(\vec{F}(\vec{r}), -C_B(\vec{r}_2, \vec{r}_1)) \\ &= W(\vec{F}(\vec{r}), C_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2)) - W(\vec{F}(\vec{r}), C_B(\vec{r}_1, \vec{r}_2)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

wobei die letzte Identität gilt weil nach Annahme die Arbeit wegunabhängig ist.

Wir wollen nun zeigen:

Ein Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r})$  ist genau dann konservativ ist, wenn es eine Funktion  $U(\vec{r})$  von  $\mathbb{R}^3$  nach  $\mathbb{R}$  gibt so dass

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$$

gilt.

Der *Gradient*  $\vec{\nabla}$  einer (differenzierbaren) Funktion  $f(\vec{r})$  von  $\mathbb{R}^3$  nach  $\mathbb{R}$  ist dabei definiert als

$$\vec{\nabla}f(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist z.B.  $\partial/\partial x_1$  die *partielle Ableitung nach  $x_1$* , d.h. die Ableitung nach  $x_1$  wobei  $x_2$  und  $x_3$  festgehalten – d.h. salopp gesagt als Konstanten betrachtet – werden.

Um die Aussage zu beweisen berechnen wir zunächst für eine Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  relativ zu einem Bezugssystem

$$\frac{d}{dt}U(\vec{r}(t)) = \vec{\nabla}U(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t),$$

wobei wir die Kettenregel verwendet haben. Wir betrachten nun eine beliebige Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  (relative zu einem Bezugssystem) die von  $t_1$  bis  $t_2$  betrachtet einen beliebigen Weg  $C(\vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2))$  bestimmt und berechnen

$$\begin{aligned} \int_{C(\vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2))} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \vec{\nabla}U(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}U(\vec{r}(t)) = -(U(\vec{r}(t_2)) - U(\vec{r}(t_1))). \end{aligned}$$

Das Ergebnis hängt offenbar nur von Anfangs- und Endpunkt ab aber nicht von dem Weg dazwischen. Damit ist gezeigt, dass die Existenz eines solchen  $U(\vec{r})$  die Wegunabhängigkeit der Arbeit impliziert.

Um die Umkehrung der Aussage zu zeigen, d.h. Wegunabhängigkeit der Arbeit impliziert Existenz von  $U(\vec{r})$  definieren wir für beliebiges  $\vec{r}(t)$  und einen dadurch festgelegten Weg  $C(\vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2))$   $U(\vec{r}(t_2))$  als

$$U(\vec{r}(t_2)) = - \int_{C(\vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2))} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}.$$

Nach Annahme hängt  $U(\vec{r}(t_2))$  wirklich nur von  $\vec{r}(t_2)$  zum betrachteten Zeitpunkt  $t = t_2$  ab, d.h. vom Endpunkt des Weges, und nicht von  $\vec{r}(t)$  zu anderen Zeiten. Die mögliche Abhängigkeit vom Anfangspunkt  $\vec{r}(t_1)$  diskutieren wir gleich. Da  $t_2$  und  $\vec{r}(t)$  beliebig gewählt sind, definiert das eine Funktion  $U(\vec{r})$  für beliebige  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ . Wie bereits besprochen gilt für so eine Funktion ausgewertet auf einer Kurve  $\vec{r}(t)$

$$\frac{d}{dt}U(\vec{r}(t)) = \vec{\nabla}U(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t),$$

andererseits gilt nach Definition von  $U$

$$\frac{d}{dt}U(\vec{r}(t)) = - \frac{d}{dt} \int_{C(\vec{r}(t_1), \vec{r}(t))} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \int_{t_1}^t \vec{F}(\vec{r}(t')) \cdot \dot{\vec{r}}(t') dt' = - \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t).$$

Zusammen gilt also

$$(\vec{\nabla}U(\vec{r}(t)) + \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)) = 0.$$

Da  $\vec{r}(t)$  und damit  $\dot{\vec{r}}(t)$  beliebig war, folgt

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}).$$

Wählt man für die Definition von  $U$  einen anderen Anfangspunkt  $\vec{r}(t'_1)$  anstatt  $\vec{r}(t_1)$  dann gilt

$$\begin{aligned} U'(\vec{r}(t)) &= - \int_{C(\vec{r}(t'_1), \vec{r}(t))} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{C(\vec{r}(t_1), \vec{r}(t))} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \int_{C(\vec{r}(t'_1), \vec{r}(t_1))} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= U(\vec{r}(t)) + c. \end{aligned}$$

mit einer Konstante  $c$ . Diese spielt aber keine Rolle denn

$$\vec{\nabla}(U + c) = \vec{\nabla}U,$$

mit anderen Worten,  $U$  ist nur bis auf eine Konstante bestimmt.

Wir nennen  $U(\vec{r})$  das zu einem konservativen Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r})$  gehörende *Potential*, bzw. die zu dem Kraftfeld gehörende *potentielle Energie*. Das negative Vorzeichen in der Definition von  $U$  ist dabei Konvention und soll der Intuition Rechnung tragen, dass Systeme zu einem Zustand hinstreben, in dem die potentielle Energie minimal ist.

Ist  $\vec{F}(\vec{r})$  ein konservatives zeitunabhängiges Kraftfeld, dann gilt einerseits wie besprochen

$$\frac{d}{dt}T = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}(t)^2 = m \ddot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

und andererseits

$$-\frac{d}{dt}U = -\vec{\nabla}U(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

und daher wegen der Newton'schen Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}E = 0, \quad E = T + U.$$

Im Fall, dass das Kraftfeld auch explizit von der Zeit abhängt  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}(t), t)$  gilt das auch für  $U = U(\vec{r}(t), t)$  und in der totalen Zeitableitung von  $U$  gibt es einen zusätzlichen Beitrag so dass  $\frac{d}{dt}(T + U) \neq 0$ . Wir finden also für ein Punktteilchen:

Für ein zeitunabhängiges konservatives Kraftfeld ist die Gesamtenergie  $E$ , d.h. die Summe aus der kinetischen Energie  $T$  und der potentiellen Energie  $U$  konstant.

Ein Beispiel für eine Situation in der  $\vec{F}$  explizit von der Zeit abhängt und damit die Energie nicht erhalten ist, die die oben angesprochene erzwungene Schwingung, bei der die äußere Kraft sozusagen "Energie in das System pumpt".

### 2.4.1 Beispiele für konservative Kraftfelder

**Homogene Kraftfelder** Jedes homogene Kraftfeld  $\vec{F} = \vec{F}_0$  ist konservativ mit (möglichem) Potential

$$U(\vec{r}) = -\vec{F}_0 \cdot \vec{r} = -\sum_{i=1}^3 F_{0,i} x_i.$$

Denn es gilt für alle  $j = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^3 F_{0,i} x_i = F_{0,j}.$$

Für das Schwerfeld der Erde gilt insbesondere mit der  $x_3$ -Achse in  $-\vec{g}$ -Richtung

$$U = mgx_3.$$

**Zentralkräfte** Jedes Kraftfeld von der Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad r = |\vec{r}|$$

ist konservativ. Solche Kräfte nennen wir (*rotationssymmetrische*) *Zentralkräfte* weil die Kraft zum Ursprung zeigt (oder davon weg) und weil der Betrag der Kraft nur vom Abstand zum Ursprung abhängt und nicht von der Richtung von  $\vec{r}$ . Die Potentialfunktion für solche Kraftfelder ist von der Form

$$U(\vec{r}) = g(r) \quad \text{wobei} \quad -\frac{dg(r)}{dr} = f(r).$$

Denn für so ein Potential gilt nach Kettenregel

$$-\vec{\nabla}U(\vec{r}) = -\vec{\nabla}g(r) = -\frac{dg(r)}{dr} \vec{\nabla}r.$$

Zusätzlich gilt

$$\vec{\nabla}r = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Beispiele sind harmonische Kräfte

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$$

mit Potential

$$U(\vec{r}) = \frac{k}{2} r^2$$

und die Gravitationskraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

mit Potential

$$U(\vec{r}) = G \frac{m_1 m_2}{r}.$$

**Nichtkonservative Kräfte** Beispiele für nichtkonservative Kräfte sind zum einen alle geschwindigkeitsabhängigen Kräfte, d.h. alle Kräfte die erst gar nicht durch Kraftfelder  $\vec{F}(\vec{r})$  beschreibbar sind. Als praktisches Beispiel kann man sich eine Kiste vorstellen die man auf einem rauen Untergrund von  $P_1$  nach  $P_2$  schiebt, mit betragsmässig konstanter Geschwindigkeit und damit betragsmässig konstanter Reibungskraft die immer parallel zum Weg ist, d.h. also  $\vec{F} \cdot \vec{r}$  ist konstant. Damit hängt die geleistete Arbeit aber von der Länge = Dauer des Weges ab. Die Energieerhaltung ist verletzt, da durch die Reibung Energie "abgegeben wird".

Diese Überlegungen gelten allerdings nicht für die Lorentzkraft, da

$$\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r})) \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$

und die Lorentzkraft somit gar keine Arbeit leistet. Die geleistete Arbeit ist damit insbesondere auf allen Wegen 0 und kann durch Potentialdifferenzen einer Potentialfunktion  $U(\vec{r}) = 0$  ausgedrückt werden. Es gilt allerdings nicht  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$  da  $\vec{F}$  kein Kraftfeld ist.

## 2.5 Eindimensionale Bewegungen

### 2.5.1 Kraftfelder in einer Raumdimension

Im eindimensionalen Fall ist die Situation besonders einfach. Jedes Kraftfeld  $F = F(x)$  ist konservativ, denn es existiert immer ein  $U(x)$  mit

$$F(x) = -\frac{d}{dx}U(x)$$

(im eindimensionalen Fall ist der Gradient eine einfache Ableitung), und zwar ist jede Stammfunktion von  $-F(x)$  ein solches  $U(x)$ .

Daraus folgt, dass sich in einer Dimension die Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichung für den Fall, dass die Kraft ein nicht explizit zeitabhängiges Kraftfeld ist ( $F(x, \dot{x}, t) = F(x)$ ), direkt explizit hinschreiben lässt.

Wegen der Energieerhaltung gilt

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + U(x(t)) = \text{konst.}$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}(t) = \pm \sqrt{\frac{2(E - U(x(t)))}{m}}$$

Wir nehmen jetzt nun an dass  $\dot{x}(t) > 0$ , um eine Lösung für die Abschnitte der Bahnkurve zu bekommen in denen die Geschwindigkeit positiv ist. Die Lösung für die anderen Abschnitte erhält man analog. Wir finden dann

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2(E - U(x(t)))}{m}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\frac{2(E - U(x(t)))}{m}}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(t')}{\sqrt{\frac{2(E - U(x(t')))}{m}}} dt' = \int_{t_0}^t dt' \quad \left[ \dot{x} dt = \frac{dx}{dt} dt = dx \right]$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{\frac{2(E - U(x'))}{m}}} dx' = t - t_0.$$

Die linke Seite der letzten Gleichung ergibt eine Funktion  $f(x, x_0)$  die von  $x$  und  $x_0$  abhängt. Die Gleichung

$$f(x, x_0) = t - t_0$$

lässt sich dann (unter der getroffenen Annahme  $\dot{x} > 0$ ) im Prinzip eindeutig nach  $x$  auflösen. Man erhält dann eine Lösung  $x(t)$  die von  $x_0 = x(t_0)$  und  $E$  abhängt. Die Konstante  $E$  ersetzt dabei die Angabe der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = \dot{x}(t_0)$  denn

$$v_0 = \dot{x}(t_0) = \sqrt{\frac{2(E - U(x(t_0)))}{m}} = \sqrt{\frac{2(E - U(x_0))}{m}} \Leftrightarrow E = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0).$$

**Beispiel** Wir betrachten ein räumlich und zeitlich konstantes Kraftfeld  $F = F_0$ . Dann ist ein mögliches Potential gegeben durch  $U(x) = -F_0x$ . Wir finden

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{\frac{2(E - U(x'))}{m}}} dx' &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{E + F_0x'}} dx' = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{2}{F_0} \sqrt{E + F_0x'} \Big|_{x_0}^x \\ &= \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{2}{F_0} \left( \sqrt{E + F_0x} - \sqrt{E + F_0x_0} \right) = t - t_0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{F_0} \left( \left( \sqrt{\frac{2}{m} F_0} (t - t_0) + \sqrt{E + F_0x_0} \right)^2 - E \right) \\ &= \frac{1}{F_0} \left( \frac{F_0^2}{2m} (t - t_0)^2 + F_0 \sqrt{\frac{2(E + F_0x_0)}{m}} (t - t_0) + F_0x_0 \right) \\ &= \frac{F_0}{2m} (t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0. \end{aligned}$$

Diese Lösung hatten wir natürlich früher auf einem einfacheren Weg hergeleitet. Für ein allgemeines Kraftfeld ist die hier beschriebene Methode aber in der Regel die effektivste, denn die Energieerhaltung wird ausgenutzt um aus der Newton'schen Bewegungsgleichung, die zwei Zeitableitungen hat, eine einfachere Bewegungsgleichung zu erhalten, die nur einfache Zeitableitungen hat. Das Integral über  $x'$  und das Auflösen nach  $x$  ist für komplizierte Kraftfelder oft nicht exakt möglich und kann dann nur numerisch mit einem Computer berechnet werden. In diesem Beispiel sehen wir auch, dass die Einschränkung  $\dot{x} > 0$  für die Lösung aufgehoben werden kann - die Lösung ist auch für negative Geschwindigkeiten sinnvoll (z.B. für den Fall im Schwerfeld in geeigneten Koordinaten).

Da die kinetische Energie immer positiv ist, gilt allgemein  $E = T + U \geq U$ , d.h. die Gesamtenergie kann nie kleiner als die potentielle Energie sein. Für eine gegebene Potentialfunktion  $U(x)$  kann man also direkt ablesen, welche Bereiche des Raumes für eine Punktmasse mit gegebener Energie  $E$  "erlaubt" und welche "verboten" sind. Wenn wir z.B. den Fall betrachten dass  $U(x)$  bei  $x$  gegen  $-\infty$  unendlich wird, ein negatives Minimum bei  $x = x_1$  und ein positives (lokales) Maximum bei  $x = x_2$  hat, und für  $x$  gegen  $+\infty$  zu Null geht, dann gilt für ein Teilchen mit  $U(x_1) \leq E < 0$ , dass es sich nur in einer Umgebung des Minimums bei  $x = x_1$  aufhalten kann,

die umso kleiner ist, je kleiner  $E - U(x_1)$  ist. Daher bezeichnet man Potentialminima als *stabile Gleichgewichtspunkte* im Gegensatz zu Potentialmaxima, die *labile Gleichgewichtspunkte* sind. Die Definition von solchen Gleichgewichtspunkten gilt analog auch für mehrere Raumdimensionen.

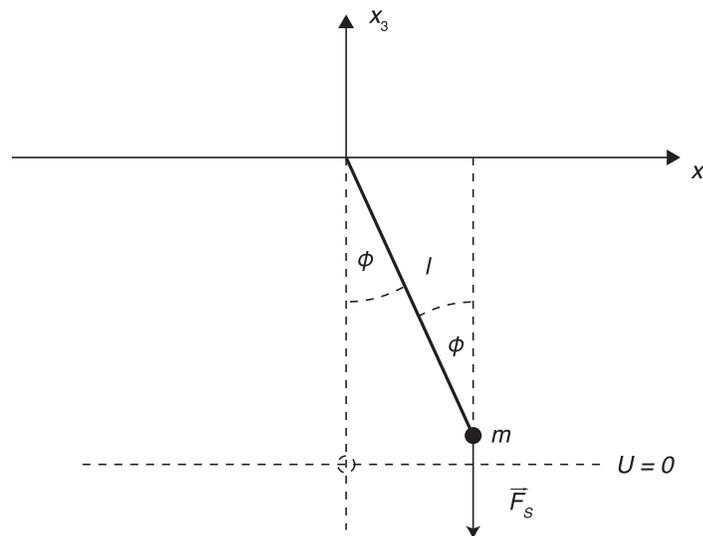
Wenn  $U(x_1) < E < 0$  gilt, dann ist das Teilchen für alle Zeiten in Bewegung und oszilliert um den stabilen Gleichgewichtspunkt (Reibung haben wir ja ausgeschlossen). Für generische Potentiale und nicht zu große Energien - d.h. kleine Auslenkungen - kann man das Potential in der Umgebung von  $x_1$  durch ein harmonisches Potential annähern (Taylor-entwickeln)

$$U(x) \approx \frac{k}{2}(x - x_1)^2 \quad \text{wobei} \quad k = \frac{d^2}{dx^2}U(x)|_{x=x_1}.$$

Aus diesem Grund sind einfache Schwingungsbewegungen in der klassischen Mechanik von zentraler Bedeutung.

### 2.5.2 Pendel bei großen Auslenkungen

Als Beispiel für eine eindimensionale Bewegung in einem Kraftfeld betrachten wir ein Pendel im Schwerfeld der Erde wobei wir uns nicht auf kleine Auslenkungen beschränken wollen.



Wir betrachten also einen starren Stab der Länge  $l$ , den wir der Einfachheit halber als masselos betrachten wollen. Ein Ende des Stabes sei im Ursprung fixiert. Am anderen, freien Ende ist ein Massenpunkt mit Masse  $m$  befestigt. Wir können Anfangsbedingungen und Koordinaten so wählen, dass die Bewegung des Stabes nur in der  $x_1$ - $x_3$ -Ebene verläuft. D.h.  $\vec{v}_0$  hat keine

$x_2$ -Komponente (und wir vernachlässigen die Erdrotation und betrachten ein erdfestes Bezugssystem als inertial). Dann ist der Ortsvektor  $\vec{r}$  des Massenpunktes eindeutig durch den Winkel  $\phi$  zwischen  $x_3$ -Achse und Stab festgelegt. Vorsicht: wir verlangen nicht, dass dieser Winkel spitz ist, er kann alle Werte von (Konvention)  $-\pi$  bis  $\pi$  annehmen! Es gilt

$$\vec{r}(t) = l \begin{pmatrix} \sin(\phi(t)) \\ 0 \\ -\cos(\phi(t)) \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}}(t) = l \dot{\phi}(t) \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ 0 \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix}.$$

Die Bewegung des Pendels erfolgt unter dem Einfluss des Schwerfeldes der Erde. Das Potential dieses konservativen Kraftfeldes ist

$$U(\vec{r}) = mgx_3 + C = mgl(1 - \cos(\phi)).$$

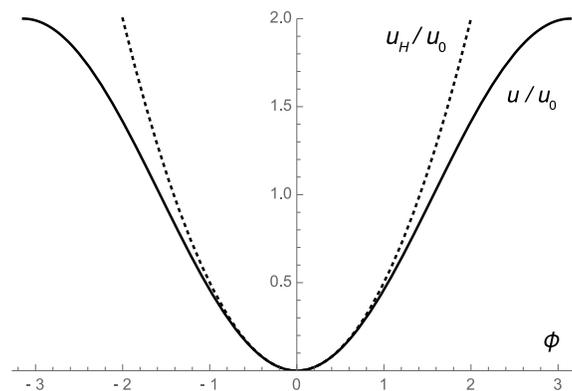
Die beliebige Konstante  $C$  haben wir dabei so gewählt, dass  $U(\vec{r}) = 0$  für  $\phi = 0$ .

Offenbar haben wir es zunächst mit einer Bewegung in drei Raumdimensionen zu tun. Durch die Wahl der Anfangsbedingungen haben wir die Bewegung auf zwei Raumdimensionen eingeschränkt. Dadurch dass der Massenpunkt am Ende eines starren Stabes befestigt ist, dessen anderen Ende fix ist, haben wir die Bewegung auf eine eindimensionale Bewegung eingeschränkt, und zwar ist nur der Winkel  $\phi$  variabel - mit anderen Worten, die Bewegung des Massenpunktes ist auf einen Kreis mit Radius  $l$  eingeschränkt. Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir solche eingeschränkten Bewegungen allgemeiner behandeln. Im vorliegenden Fall können wir die Grundgleichungen so umschreiben, dass es sie die Form von Gleichungen für die eindimensionale "Bahnkurve"  $\phi(t)$  haben. Dazu verwenden wir die Energieerhaltung.

$$E = T + U = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + mgl(1 - \cos(\phi))$$

Mit den Definitionen  $I = ml^2$ ,  $u_0 = mgl$ ,  $u(\phi) = u_0(1 - \cos(\phi))$  gilt

$$E = \frac{I}{2} \dot{\phi}^2 + u(\phi).$$



Diese Gleichung hat offenbar die Form einer Energieerhaltungsgleichung in einer Raumdimension. Wir können also die Methode aus dem vorigen Abschnitt verwenden, um die Bahnkurve  $\phi(t)$  zu berechnen.  $I$  ist dabei das *Trägheitsmoment* des Massenpunktes bezüglich der Drehachse, d.h. der  $x_2$ -Achse.

Bevor wir das tun, wollen wir zunächst überlegen, was wir erwarten.

1. Bei Betrachtung der Potentialfunktion  $u(\phi)$  wird deutlich, dass  $\phi = 0$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist, während  $\phi = \pi$  bzw. äquivalent dazu  $\phi = -\pi$  ein labiler Gleichgewichtspunkt ist.
2. Für kleine Auslenkungen  $\phi \ll 1$ , d.h. kleine Energien, können wir den Kosinus Taylorentwickeln

$$\cos(\phi) \approx 1 - \frac{1}{2}\phi^2 \quad \Rightarrow \quad u(\phi) \approx u_H(\phi) = \frac{u_0}{2}\phi^2.$$

In diesem Fall wird die Bewegung um den stabilen Gleichgewichtspunkt also durch ein harmonisches Potential beschrieben, im Einklang mit unseren allgemeinen Betrachtungen im vorherigen Abschnitt.

3. Für grössere Energien, aber  $E < 2u_0$  ist die harmonische Näherung nicht mehr sinnvoll, das Pendel schwingt aber nach wie vor um den stabilen Gleichgewichtspunkt, da  $\phi$  nur Werte in einem Intervall  $[-\phi_{\max}, \phi_{\max}]$  mit  $\phi_{\max} < \pi$  einnehmen kann.
4. Für  $E = 2u_0$  hat das Pendel gerade genug Energie um bis zum labilen Gleichgewichtspunkt zu schwingen oder sich in Ruhe dort aufzuhalten. Für  $E > 2u_0$  kann das Pendel kreisen bzw. durchschwingen.

Es ist nützlich, diese Betrachtungen an einem *Phasenportrait* nachzuvollziehen. Dazu definieren wir

$$q = \phi, \quad p = I\dot{\phi}.$$

Wir nennen  $q$  *verallgemeinerte Koordinate* und  $p$  *verallgemeinerten Impuls*. Diese Begriffe werden im Verlauf der Vorlesung noch genauer diskutiert. Für eine Bahnkurve  $\phi(t) = q(t)$  gibt es eine dazu gehörige "Impulsbahnkurve"  $p(t)$ . Natürlich können wir  $p(t)$  durch Ableiten nach der Zeit und multiplizieren mit  $I$  aus  $q(t)$  berechnen. Darüber hinaus ist wegen der Energieerhaltung die Beziehung zwischen  $q(t)$  und  $p(t)$  für alle Zeiten fixiert.

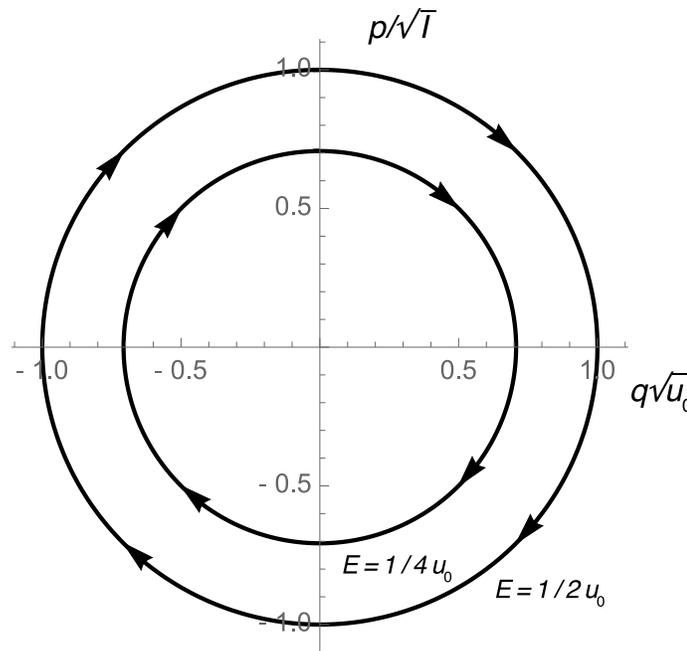
$$E = \frac{p(t)^2}{2I} + u_0(1 - \cos(q(t)))$$

In einem Phasenportrait wird diese Beziehung grafisch dargestellt. Dazu tragen wir an der Ordinate  $p$  und an der Abszisse  $q$  auf. Der zweidimensionale Raum der durch  $q$  und  $p$  aufgespannt wird, wird *Phasenraum* genannt. Der Bahnkurve  $q(t)$  im *Ortsraum* (hier besser "Winkelraum") entspricht also eine eindeutige *Phasenkurve* im Phasenraum.

Wir wollen solche Phasenkurven zunächst für den Fall kleiner Auslenkungen betrachten. Dann gilt näherungsweise

$$E = \frac{I}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{u_0}{2}\phi^2 = \frac{p^2}{2I} + \frac{u_0}{2}q^2 = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{p}{\sqrt{I}} \right)^2 + (\sqrt{u_0}q)^2 \right).$$

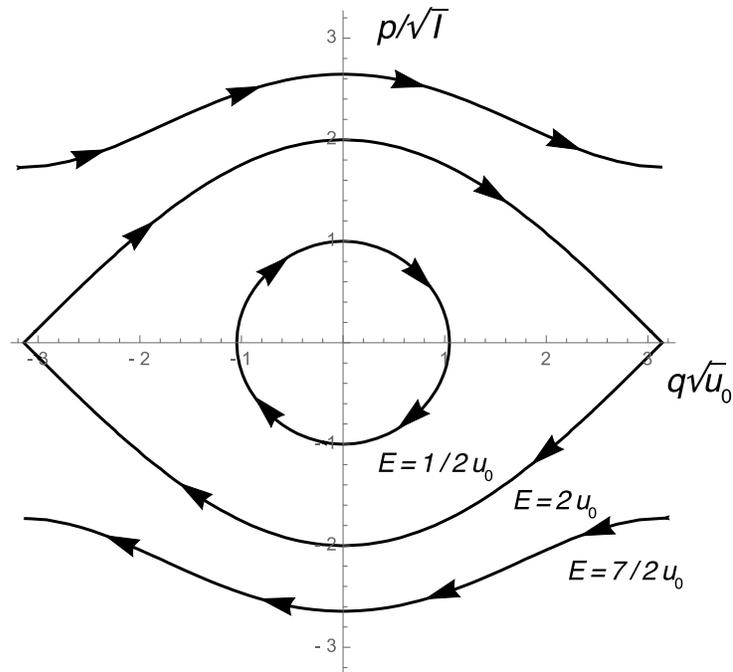
Bezüglich der reskalierten verallgemeinerten Orts- und Impulsvariablen  $\sqrt{u_0}q$  und  $p/\sqrt{I}$  sind die Phasenkurven also Kreise mit Radius  $\sqrt{2E}$ . (Ohne Reskalierung bekommt man Ellipsen.) Diese



Kreise werden im Uhrzeigersinn durchlaufen, denn wenn  $q$  größer wird, dann ist  $p > 0$ .

Durch den Abstraktionsschritt zum Phasenraum haben wir erreicht, dass wir Bahnkurven kompakt grafisch darstellen können. Eine bestimmte Phasenkurve beschreibt alle Bahnkurven deren Anfangsbedingungen  $q_0 = q(t_0)$ ,  $p_0 = p(t_0)$ , bzw.  $\phi(t_0)$ ,  $\dot{\phi}(t_0)$  mit ein und derselben Gesamtenergie  $E$  verträglich sind und das zu allen Zeiten. Wie besprochen ist aus der Mathematik bekannt dass die Lösungen der Newton'schen Bewegungsgleichung für vorgegebene Anfangsdaten eindeutig sind, was physikalisch der Tatsache entspricht, dass Bewegungen in der klassischen Mechanik immer *deterministisch* sind. Daraus folgt ganz allgemein für Phasenportraits für eindimensionale Bewegungen in beliebigen statischen Kraftfeldern  $F(x)$  dass sich Phasenkurven *niemals schneiden*. Denn würden Sie zwei Phasenkurven an einem Schnittpunkt  $(q_0, p_0)$  schneiden, dann gäbe es für die entsprechenden Anfangsbedingungen in ein und demselben Kraftfeld zwei verschiedene mögliche Lösungen der Newton'schen Bewegungsgleichung.

Wir wollen nun den Fall beliebiger Auslenkungen betrachten.



In der obigen Abbildung sind Phasenkurven für die drei charakteristische Fälle abgebildet.

1. Für  $E = \frac{1}{2}u_0$  sind wir im Bereich in dem die harmonische Näherung recht gut ist. Die Phasenkurve ist ein Kreis, der rechts und links minimal "ausgebeult" ist. Das kann man leicht verstehen, denn die Potentialfunktion  $u(\phi)$  ist für große  $|\phi| = |q|$  ja flacher als eine Parabel, d.h. bei vorgegebener Energie kann das Pendel im Potential  $u(\phi)$  weiter ausschlagen als im Potential  $u_H(\phi)$ .
2. Für  $E = 2u_0$  haben wir den Grenzfall, dass das Pendel gerade bis ganz nach oben kommt und im Prinzip durchschwingen kann. Die Tatsache, dass die entsprechende Phasenkurve links und rechts eine "Ecke" hat deutet an, dass dort etwas "seltsames" passiert. Das werden wir gleich näher untersuchen.
3. Für  $E = \frac{7}{2}u_0$ , d.h.  $E > 2u_0$  kreist das Pendel beständig. Im Gegensatz zur Situation  $E \leq 2u_0$  ist die Geschwindigkeit  $\dot{\phi}$  am Scheitelpunkt nicht 0, allerdings ist sie wegen der Energieerhaltung sehr wohl geringer als bei  $\phi = 0$  wo die potentielle Energie kleiner ist. Da  $\phi = -\pi$  äquivalent zu  $\phi = \pi$  ist muss man sich die Phasenkurven für  $E > 2u_0$  periodisch fortgesetzt denken.

Nach diesen qualitativen Betrachtungen wollen wir nun mit der im vorigen Abschnitt besprochene Lösungsmethode etwas Konkretes berechnen. Mit den Resultaten aus dem vorigen Abschnitt

können wir die Bahnkurve  $\phi(t)$  (zumindest für  $\dot{\phi} > 0$ ) berechnen durch

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{1}{\sqrt{\frac{2(E-u(\phi'))}{I}}} d\phi' = \sqrt{\frac{I}{2u_0}} \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{1}{\sqrt{\frac{E}{u_0} - 1 + \cos(\phi')}} d\phi' = t - t_0;$$

d.h.  $\phi(t)$  ergibt sich durch Berechnung des Integrals und auflösen nach  $\phi$ . Das Resultat des Integrals lässt sich (außer näherungsweise für kleine Auslenkungen) nicht durch einfache analytische Funktionen ausdrücken. Wir können trotzdem Aussagen über die Schwingungsdauer oder -periode  $\tau$  machen, d.h. die Zeit, die das Pendel für einen vollständige Schwingung von einem Maximalausschlag  $\phi = -\phi_{\max}$  zum anderen  $\phi = \phi_{\max}$  und zurück braucht. Es gilt

$$\tau = 2\sqrt{\frac{I}{2u_0}} \int_{-\phi_{\max}}^{\phi_{\max}} \frac{1}{\sqrt{\frac{E}{u_0} - 1 + \cos(\phi')}} d\phi' = 4\sqrt{\frac{I}{2u_0}} \int_0^{\phi_{\max}} \frac{1}{\sqrt{\frac{E}{u_0} - 1 + \cos(\phi')}} d\phi'.$$

Der Faktor 2 in der ersten Identität rührt daher, dass die Schwingung von  $-\phi_{\max}$  zu  $\phi_{\max}$  genauso lange dauert wie der umgekehrte Vorgang. Die 2. Identität gilt, da der Kosinus symmetrisch ist. Wir erinnern uns daran, dass der Term unter der Wurzel immer  $\geq 0$  ist, da  $T \geq 0$ .

Für kleine Auslenkungen können wir die harmonische Näherung verwenden. Dann können wir die Lösung für  $\phi(t)$  einfacher berechnen bzw. angeben, nämlich als Linearkombination von  $\cos(\omega_0 t)$  und  $\sin(\omega_0 t)$  mit  $\omega_0 = \sqrt{u_0/I}$  (vergl. Aufgabe 4.1). Die Schwingungsdauer ist dann  $\tau = 2\pi/\omega_0$ , insbesondere ist sie unabhängig von den Anfangsbedingungen und damit von  $E$ . Für große Auslenkungen können wir eine untere Schranke für  $\tau$  berechnen. Dazu verwenden wir

$$\cos(\phi) \leq \frac{1}{2}(\phi - \pi)^2 - 1 \quad \text{für} \quad \phi \in [0, \pi]$$

(um sich das klarzumachen verschiebe man die Graphen in der Abbildung von  $u(\phi)$  und  $u_H(\phi)$  um 1 nach unten und  $\pi$  nach rechts). Es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{E}{u_0} - 1 + \cos(\phi') &\leq \frac{E}{u_0} - 2 + \frac{1}{2}(\phi' - \pi)^2 \leq \frac{E}{u_0} - 2 + (\phi' - \pi)^2 \\ \Rightarrow \quad \tau &= 4\sqrt{\frac{I}{2u_0}} \int_0^{\phi_{\max}} \frac{1}{\sqrt{\frac{E}{u_0} - 1 + \cos(\phi')}} d\phi' \geq 4\sqrt{\frac{I}{2u_0}} \int_0^{\phi_{\max}} \frac{1}{\sqrt{\frac{E}{u_0} - 2 + (\phi' - \pi)^2}} d\phi' \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + b}} \quad \text{ist} \quad -\log\left(- (x-a) + \sqrt{(x-a)^2 + b}\right).$$

Wir finden also

$$\tau \geq 4\sqrt{\frac{I}{2u_0}} \log\left(\frac{\pi + \sqrt{\pi^2 + \frac{E}{u_0} - 2}}{\pi - \phi_{\max} + \sqrt{(\pi - \phi_{\max})^2 + \frac{E}{u_0} - 2}}\right).$$

Für  $E < 2u_0$  und damit  $\phi_{\max} < \pi$  ist die untere Schranke immer endlich. Für  $E \geq 2u_0$  ist  $\phi_{\max} = \pi$  und die untere Schranke vereinfacht sich zu

$$\tau \geq 4\sqrt{\frac{I}{2u_0}} \log \left( \frac{\pi + \sqrt{\pi^2 + \frac{E}{u_0} - 2}}{\sqrt{\frac{E}{u_0} - 2}} \right).$$

Interessant ist, was im Grenzfall  $E = 2u_0$  passiert, dann divergiert die untere Schranke, d.h.  $\tau = \infty$ ! Allgemein gilt, dass die Schwingungsdauer umso größer wird, je kleiner  $|E - 2u_0|$  ist. Anschaulich ist das leicht zu verstehen. Wenn  $E = 2u_0$  ist und man setzt als Anfangsbedingung  $\phi_0 = \phi(t_0) = \pi$  dann ist das Pendel in einem labilen Gleichgewicht, es bewegt sich also gar nicht und benötigt damit unendlich viel Zeit für eine volle Schwingung. Andererseits hängt die Schwingungsdauer nicht von  $\phi_0$  ab, sondern nur von der Energie, d.h.  $\dot{\phi}(t_0)$ . Diese Divergenz der Schwingungsdauer im Grenzfall  $E = 2u_0$  ist der Grund warum die entsprechende Phasenkurve als einzige "Ecken" hat.

Unter [bit.ly/pendel2016](http://bit.ly/pendel2016) können Sie dieses Verhalten an einer Animation ausprobieren. Mit einem Klick auf "Anf.b." können Sie die Anfangsbedingungen festlegen. Probieren Sie  $\varphi_0 = 3, 3.14, 3.1415926$  und beobachten Sie, wie sich die Schwingungsdauer ändert. Wenn Sie viel Zeit haben, nehmen Sie noch ein paar weitere Nachkommastellen von  $\pi$  dazu.

### 2.5.3 Erzwungene Schwingung

Ein weiteres interessantes Beispiel für ein eindimensionales System, das für "Alltagsphänomene" relevant ist, ist die erzwungene Schwingung oder der getriebene Oszillator in einer Dimension.

Die entsprechende Bewegungsgleichung ist

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) + f_0 \cos(\omega t).$$

Der Beitrag  $f_0 \cos(\omega t)$  ist eine zeitabhängige äußere Kraft, die zusätzlich zur inneren Rückstellkraft  $-kx(t)$  wirkt. Wegen der Zeitabhängigkeit der äußeren Kraft ist die Energieerhaltung verletzt und die Lösungsmethode im vorvorletzten Abschnitt nicht anwendbar. Man kann die Bewegungsgleichung aber - wie in den Übungen diskutiert - mit einem passend gewählten Ansatz lösen. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung lautet

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Dabei sind  $A$  und  $B$  frei wählbare Konstanten die sich durch Anfangsbedingungen festlegen lassen:  $A = x(0) - f_0(m(\omega_0^2 - \omega^2))^{-1}$ ,  $B = \dot{x}(0)/\omega_0$ . Die allgemeine Lösung ist also eine Überlagerung aus zwei Schwingungen mit im Allgemeinen unterschiedlichen Frequenzen - zum einen eine Schwingung mit der Eigenfrequenz  $\omega_0$ , zum anderen eine Schwingung mit der äußeren Frequenz  $\omega$ . Es leuchtet ein, dass der Beitrag der Eigenschwingung durch die Anfangsbedingungen

festgelegt wird. Für  $x(0) = f_0(m(\omega_0^2 - \omega^2))^{-1}$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , d.h. falls zu einem Zeitpunkt Ort und Geschwindigkeit des Oszillators an die äußere Schwingung angeglichen sind, bleibt das für alle Zeiten so und die Eigenschwingung tritt gar nicht auf. Die äußere Schwingungsfrequenz trägt allerdings immer bei, und ihr Beitrag wird durch die Stärke der äußeren Kraft  $f_0$  und die Relation zwischen  $\omega$  und  $\omega_0$  quantifiziert.

Tatsächlich ist die Amplitude des Beitrages der äußeren Schwingung, d.h.

$$C = \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

derart, dass sie für  $\omega_0$  sehr nah an  $\omega$  sehr groß wird und für  $\omega_0 = \omega$  divergiert, d.h. unendlich groß wird. Dieses Phänomen wird *Resonanz* genannt und tritt im Alltag in vielfältigen Formen auf. Ein anschauliches Beispiel ist eine Schaukel, der man am besten Anschwung gibt, indem man sie immer dann wenn sie nach vorne schwingt anschubst (oder als Schaukelnder entsprechende Bewegungen bei den Umkehrpunkten der Schwingung macht). Dabei spielt es für die Resonanz keine Rolle ob die äußere Kraft als Funktion der Zeit tatsächlich ein Kosinus ist, es ist nur wichtig, dass sie periodisch ist, mit einer Periode die der Periode der Eigenschwingung des Systems entspricht. Weitere Beispiele für Resonanzphänomene:

- Resonanzkörper in Musikinstrumenten, z.B. bei einer Geige. In diesem Fall ist die äußere Kraft die Schwingung der Saiten, die den Geigenkorpus selbst zu Schwingungen anregt und damit die Schwingung der Saiten deutlich hörbar macht. Der Geigenkorpus muss also so konstruiert sein, dass er die richtige Eigenfrequenz (in diesem Fall mehrere) hat.
- Die ratternde Waschmaschine. Die Wäschetrommeln in einer Waschmaschine ist an Federn aufgehängt und hat damit bestimmte Eigenfrequenzen. Die äußere Kraft ist die Drehung der Trommel. Bei bestimmter Drehgeschwindigkeit werden diese Eigenfrequenzen getroffen und die Waschmaschine fängt an zu rattern.
- Einstürzende Brücken. Brücken können dadurch zum Einsturz gebracht werden, dass Soldaten im Gleichschritt über sie marschieren. In Deutschland ist das aus diesem Grund verboten.
- "Zersingen" eines Glases. Trifft man durch Schall eine Resonanzfrequenz eines Glases, zerspringt das Glas bei ausreichend langer und lauter Beschallung.

Die Tatsache, dass man in der Realität keine "unendlich großen Amplituden" beobachtet, liegt weniger daran, dass alles kaputtgeht, bevor es unendlich stark schwingt, oder dass es in der Praxis nicht möglich ist, eine Resonanzfrequenz perfekt zu treffen. Der Grund dafür ist, dass realistische Oszillatoren immer - z.B. durch Reibung - gedämpft sind. Die entsprechende Bewegungsgleichung in unserem (idealisierten) Fall ist

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - 2\rho\dot{x}(t) + f_0\cos(\omega t)$$

mit der Dämpfungskonstanten  $\rho > 0$ . Wie in den Übungen besprochen, dämpft der Kraftbeitrag  $-2\rho \dot{x}(t)$  die Eigenschwingung im Fall  $f_0 = 0$  derart, dass 1. die Amplitude mit der Zeit abnimmt und 2. die Eigenschwingungsfrequenz des Systems reduziert wird, so dass - im Fall kleiner Dämpfung  $\rho^2 < \omega_0^2 m^2$  -, das System mit  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2/m^2}$  schwingt. (Im Fall großer Dämpfung schwingt das System gar nicht erst sondern kommt ohne Nulldurchgang zum Stillstand.) Die entsprechende allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$x_H(t) = e^{-\frac{\rho}{m}t} (A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)) , \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2/m^2} .$$

Hier sind  $A$  und  $B$  wieder freie Konstanten, die sich durch Anfangsbedingungen festlegen lassen.

Wie im dämpfungsfreien Fall gilt, dass die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung mit  $f_0 \neq 0$  die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Um so eine spezielle Lösung zu finden macht man den Ansatz

$$x_I(t) = C \cos(\omega t + \varphi) = C \cos(\varphi) \cos(\omega t) - C \sin(\varphi) \sin(\omega t) .$$

Hierbei ist es zweckmäßig, den Sinus-Beitrag durch eine Phase  $\varphi$  zu quantifizieren. Man findet

$$C = \frac{f_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\rho^2 \omega^2 / m^2}} , \quad \tan(\varphi) = -\frac{2\rho\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} .$$

Die erzwungene Schwingung ist also in dem Sinne gedämpft, dass ihre Amplitude kleiner ist als im Fall ohne Dämpfung und auch bei  $\omega = \omega_0$  endlich bleibt. Die Amplitude ist allerdings zeitlich konstant, da sie sozusagen durch die äußere Kraft aufrechterhalten wird. Zusätzlich gibt es im Fall nichtverschwindender Dämpfung eine Phasenverschiebung  $\varphi \neq 0$  zwischen der erzwungenen Schwingung und der äußeren Kraft.

Die allgemeine Lösung ist also (für kleine Dämpfungen)

$$x(t) = x_H(t) + x_I(t) = e^{-\frac{\rho}{m}t} (A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)) + C \cos(\omega t + \varphi) ,$$

mit  $\omega_1$ ,  $C$  und  $\varphi$  wie oben. Für große Zeiten verschwindet offenbar der Beitrag der Eigenschwingungen und es bleibt die erzwungene Schwingung übrig. Für große Dämpfungen ändert sich nur die Form von  $x_H(t)$  wie oben beschrieben, die Form von  $x_I(t)$  bleibt gültig.

Wenn man technisch Resonanzphänomene unterdrücken will, muss man also Systeme so konstruieren, dass sie möglichst gut gedämpft sind.

## 2.6 Mehrere Punktteilchen

Wir wollen nun die Bewegung mehrere Punktteilchen beschreiben. Der interessante und relevante Fall ist der, wenn die Punktteilchen jeweils miteinander wechselwirken. Tun sie das nicht, kann man jedes Punktteilchen isoliert betrachten.

Es sei  $N$  Anzahl der Punktteilchen. Die Orte der Punktteilchen im Raum seien  $P_1, \dots, P_N$ . Bezüglich eines (gemeinsamen!) Bezugssystems  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  können wir wie gewohnt die Orte durch Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  beschreiben.

$$\vec{r}_i = \overrightarrow{OP_i}, \quad i = 1, \dots, N$$

Ist  $m_i$  die Masse des  $i$ -ten Teilchen, dann gilt für jedes Teilchen die Newton'sche Bewegungsgleichung.

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i, \quad i = 1, \dots, N$$

Wir wollen im Folgenden immer davon ausgehen, dass die Kraft  $\vec{F}_i$  die auf das  $i$ -te Teilchen wirkt von der Form

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

ist. Dabei ist  $\vec{F}_i^{\text{ext}}$  eine äußere Kraft und  $\vec{F}_{ij}$  ist die innere Kraft die das Teilchen  $j$  auf das Teilchen  $i$  ausübt, die in den Regel nur von den Ortsvektoren der beiden Teilchen abhängt. Wegen des dritten Newton'schen Gesetzes gilt

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}.$$

Falls alle äußeren Kräfte verschwinden

$$\vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{0}, \quad i = 1, \dots, N$$

nennt man das System *abgeschlossen*. Die Aussage, dass ein System abgeschlossen ist, gilt unabhängig von einem Inertialsystem (ansonsten wäre sie physikalisch auch ohne Gehalt), da  $\vec{F}_i^{\text{ext}}$  in allen Inertialsystemen verschwindet sobald diese Kraft in einem beliebigen Inertialsystem verschwindet.

Es ist oft nützlich, die Bewegung der  $N$  Teilchen zu separieren in die Bewegung des Schwerpunktes des Teilchensystems und die Bewegung jedes Teilchens relativ zum Schwerpunkt. Dazu definieren wir Gesamtmasse  $M$  und Schwerpunktsvektor  $\vec{R}$  des Teilchensystems als

$$M = \sum_{i=1}^N m_i, \quad \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i.$$

Diese Definition ist so gestrickt, dass im Fall der Verschiebung aller Ortsvektoren um einen konstanten Vektor  $\vec{a}$  sich der Schwerpunktsvektor ebenfalls um  $\vec{a}$  verschiebt.

$$\vec{r}_i \mapsto \vec{r}_i + \vec{a}, \quad i = 1, \dots, N \quad \Rightarrow \quad \vec{R} \mapsto \vec{R} + \vec{a}.$$

Die Relativkoordinaten  $\vec{x}_i$  der Teilchen bezüglich des Schwerpunktes sind definiert als

$$\vec{r}_i = \vec{x}_i + \vec{R} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}_i = \vec{r}_i - \vec{R}.$$

Offensichtlich beschreiben  $\vec{x}_i$  die Bahnkurven der  $N$  Teilchen in einem Bezugssystem mit dem Schwerpunkt im Ursprung, dem sogenannten *Schwerpunktssystem*. Dieses Bezugssystem ist für nicht abgeschlossene Systeme im Allgemeinen nicht inertial.

Die  $\vec{x}_i$  beschreiben die Bewegung der Teilchen relativ zum Schwerpunkt und damit indirekt relativ zueinander. Im Fall von zwei Teilchen ist es nützlich diese Relativbewegung direkter zu beschreiben durch den Verbindungsvektor.

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Anstatt die Bewegung also durch  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  selbst (zwei Dreiervektoren), oder durch  $\vec{R}$  und  $\vec{x}_1$ ,  $\vec{x}_2$  (drei! Dreiervektoren  $\rightarrow$  ineffizient) zu beschreiben, verwendet man also  $\vec{R}$  und  $\vec{r}$  (zwei Dreiervektoren). Diese Überlegung lässt sich auf  $N > 2$  Teilchen verallgemeinern. Für allgemeine Überlegungen ist die Beschreibung durch  $\vec{R}$  und  $\vec{x}_i$  allerdings manchmal übersichtlicher.

Wir wollen im Folgenden charakteristische Größen eines Systems von  $N$  Teilchen diskutieren. Dabei wird sich zeigen, dass all diese Größen für abgeschlossene Systeme (und mit inneren Kräften in der von uns angenommenen Form) Erhaltungsgrößen sind.

### 2.6.1 Gesamtimpuls und -erhaltung

Wie bereits besprochen lässt sich das 2. Newton'sche Gesetz mit dem Impuls umformulieren. Wir setzen

$$\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i.$$

Dann gilt

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i.$$

Wie bereits erwähnt ist diese Form des 2. Newton'sche Gesetzes auch sinnvoll wenn die Masse  $m_i$  nicht konstant ist. Ein naheliegendes Beispiel dafür ist eine aufsteigende Rakete die Treibstoff verbrennt und dabei leichter wird. Ein weniger naheliegendes Beispiel ist eine knallende Peitsche die in den Übungen diskutiert wird.

Drückt man das 2. Newton'sche Gesetz durch den Impuls aus, lässt sich die Bewegung der  $N$  Teilchen in drei Raumdimensionen als Bewegung eines Teilchens in  $3N$  Raumdimensionen auffassen. Dafür setzen wir

$$\underline{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_N \end{pmatrix}, \quad \underline{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 \\ \vdots \\ \vec{p}_N \end{pmatrix}, \quad \underline{\vec{F}} = \begin{pmatrix} \vec{F}_1 \\ \vdots \\ \vec{F}_N \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann

$$\dot{\underline{\vec{p}}} = \underline{\vec{F}}.$$

Diese Sichtweise wird bei der Diskussion der Energieerhaltung für  $N$  Teilchen im übernächsten Teilabschnitt nützlich sein.

Wir betrachten nun den *Gesamtimpuls*  $\vec{P}$  des  $N$ -Teilchen-Systems, definiert als

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i.$$

Es gilt offenbar

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i.$$

Mit unserer Annahme

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij}$$

gilt wegen  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

und damit

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}}.$$

Wir finden also

Der Gesamtimpuls ist erhalten wenn die gesamte äußere Kraft verschwindet. Insbesondere ist der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems erhalten.

## 2.6.2 Schwerpunktsbewegung und -satz

Die Aussage, dass der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems erhalten ist, muss in allen Inertialsystemen gültig sein. Wir wollen daraus weitere Erhaltungsgrößen ableiten. Dazu betrachten wir zwei Inertialsysteme  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  und  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  die relativ zueinander gleichförmig geradlinig bewegt sind mit konstanter Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$ . Die Ortsvektoren der  $N$  Teilchen im ersten Bezugssystem seien  $\vec{r}_i$  und die Ortsvektoren im zweiten seien

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{v}_0 t.$$

Der Gesamtimpuls im zweiten Bezugssystem ist also

$$\vec{P}' = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'_i = \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{r}}_i + \vec{v}_0) = \vec{P} + M \vec{v}_0.$$

Da  $\vec{P}'$  auch erhalten sein muss wenn  $\vec{P}$  erhalten ist, gilt also

$$\dot{\vec{P}}' = \dot{\vec{P}} + \dot{M} \vec{v}_0 = \dot{M} \vec{v}_0 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{M} = 0$$

Wir finden also, dass in einem abgeschlossenen System (bzw. allgemeiner, in einem System in dem die gesamte äußere Kraft verschwindet) die Gesamtmasse eine Erhaltungsgröße ist. Wenn

alle Einzelmassen  $m_i$  individuell konstant sind, ist diese Aussage natürlich trivial. Allerdings gilt die Erhaltung der Gesamtmasse auch wenn die Einzelmassen  $m_i$  *nicht* individuell erhalten sind.

Wir betrachten nun den häufigen Fall konstanter Einzelmassen  $m_i$ . Dann gilt für die Geschwindigkeit des Schwerpunktes

$$\dot{\vec{R}} = \frac{d}{dt} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{P}}{M} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{P} = M \dot{\vec{R}}$$

$\vec{P}$  entspricht also der Impuls eines Teilchens, das sich im Schwerpunkt befindet und die Masse  $M$  hat. Da  $\vec{P}$  für ein abgeschlossenes System erhalten ist, folgt

$$\ddot{\vec{R}} = \frac{\dot{\vec{P}}}{M} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}(t) = \frac{\vec{P}}{M} t + \vec{R}(0).$$

Der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems bewegt sich also geradlinig gleichförmig. Man kann diese Tatsache so interpretieren:

Für ein abgeschlossenes Systems ist

$$\vec{R}(t) - \frac{\vec{P}}{M} t = \vec{R}(0)$$

eine Erhaltungsgröße.

Das ist der *Schwerpunktsatz*. Man kann zeigen dass die Erhaltung von  $\vec{R}(t) - \frac{\vec{P}}{M} t$  direkt aus der Tatsache folgt, dass die Newton'sche Bewegungsgleichung in allen Inertialsystemen gültig ist.

### 2.6.3 Energieerhaltung

Die kinetische Energie des  $i$ -ten Teilchens ist

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i}.$$

Entsprechend definiert man die gesamte kinetische Energie als

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2.$$

Analog zum Fall eines Punktteilchens kann man zeigen dass

$$T(t_2) - T(t_1) = \int_{C(\vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2))} \vec{F} \cdot d\vec{r}' = \sum_{i=1}^N \int_{C(\vec{r}_i(t_1), \vec{r}_i(t_2))} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}'_i.$$

Die Änderung der gesamten kinetischen Energie entspricht also der Summe der durch die einzelnen Kräfte an allen  $N$  Teilchen geleisteten Arbeit. Das Skalarprodukt im mittleren Ausdruck ist dabei das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^{3N}$ . Die Summe der an den  $N$  Teilchen geleisteten Arbeit kann man entsprechend als die an einem Punktteilchen in  $3N$  Raumdimensionen geleistete Arbeit auffassen. Die Aussage, dass die Arbeit genau dann wegunabhängig ist, wenn die Kraft durch ein Kraftfeld erzeugt wird, das sich als (negativer) Gradient eines Potentials ergibt, gilt in beliebigen Raumdimensionen. Eine solche Kraft ist also von der Form

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{F}_1 \\ \vdots \\ \vec{F}_N \end{pmatrix} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -\vec{\nabla}_1 U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \\ \vdots \\ -\vec{\nabla}_N U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \end{pmatrix}.$$

Es gilt also für die Kraft  $\vec{F}_i$  auf das  $i$ -te Teilchen

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N),$$

dabei ist  $\vec{\nabla}_i$  der Gradient bezüglich  $\vec{r}_i$  also

$$\vec{\nabla}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{i,1}} \\ \frac{\partial}{\partial x_{i,2}} \\ \frac{\partial}{\partial x_{i,3}} \end{pmatrix}.$$

Die Annahme dass  $\vec{F}_i$  (hier zusätzlich als Kraftfeld angenommen) von der Form

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

ist lässt sich mit der Annahme dass  $\vec{F}_i$  konservativ ist in Einklang bringen wenn man z.B. annimmt, dass das Potential  $U$  von der Form

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^N U_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j),$$

ist. Die Summe über  $j$  ist dabei begrenzt auf  $j > i$  um "Dopplungen" zu vermeiden, denn  $U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$  für  $i < j$  führt mittels  $-\vec{\nabla}_j$  bereits zu einer Kraft  $\vec{F}_{ji}$ . Mit der obigen Form des Potentials gilt (für  $i < j$ )

$$\vec{F}_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i) = -\vec{\nabla}_i U_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i), \quad \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = -\vec{\nabla}_i U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -(-\vec{\nabla}_j U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)) = -\vec{F}_{ji}(\vec{r}_j, \vec{r}_i).$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass für jede Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\vec{\nabla}_i f(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\vec{\nabla}_j f(\vec{r}_i - \vec{r}_j).$$

Das folgt aus der Tatsache, dass für eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\frac{d}{dx_2} f(x_1 - x_2) = \left( \frac{d(x_1 - x_2)}{dx_2} \right) \frac{df(x_1 - x_2)}{d(x_1 - x_2)} = - \left( \frac{d(x_1 - x_2)}{dx_1} \right) \frac{df(x_1 - x_2)}{d(x_1 - x_2)} = - \frac{d}{dx_1} f(x_1 - x_2).$$

Die obige einfache Form des Potentials ist in vielen Situationen gegeben. Allerdings gilt für beliebige konservative Kraftfelder für das  $N$ -Teilchen-System:

Ist  $\vec{F}$  ein konservatives Kraftfeld, dann ist die Gesamtenergie

$$E = T + U$$

eines  $N$ -Teilchen-Systems erhalten. Insbesondere ist die Gesamtenergie in einem abgeschlossenen  $N$ -Teilchen-System erhalten, wenn die Kräfte zwischen den Teilchen konservativ sind.

Die kinetische Energie lässt sich aufspalten in einen Schwerpunkts- und einen Relativanteil.

$$T = T_s + T_{\text{rel}}, \quad T_s = \frac{\vec{P}^2}{2M}$$

$T_{\text{rel}}$  ist dabei als Differenz von  $T$  und  $T_s$  definiert. Für ein abgeschlossenes System ist  $E_s = T_s$  separat erhalten, da  $\vec{P}$  und  $M$  erhalten sind und die externen Potentiale  $U_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i)$  alle als verschwindend gewählt werden können.

Für  $N = 2$  Teilchen werden wir gleich einen einfachen Ausdruck für  $T_{\text{rel}}$  angeben. Für  $N > 2$  ist das im Allgemeinen nicht möglich. Die potentielle Energie lässt sich darüber hinaus im Allgemeinen gar nicht erst sinnvoll in einen Schwerpunkts- und einen Relativanteil aufspalten. Wenn allerdings die relativen Abstände  $|\vec{x}_i|$  der Teilchen zum Schwerpunkt  $\vec{R}$  klein sind im Vergleich zu den Skalen auf denen die externen Potentiale  $U_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i)$  variieren, dann kann man approximieren

$$U_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i) = U_i^{\text{ext}}(\vec{R} + \vec{x}_i) \approx U_i^{\text{ext}}(\vec{R}).$$

Dann kann man

$$U^{\text{ext}}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^N U_i^{\text{ext}}(\vec{R})$$

als Schwerpunktpotential auffassen und die Bewegung des Schwerpunktes näherungsweise vollständig getrennt von der relativen Bewegung der  $N$  Teilchen betrachten - als Verallgemeinerung des Falls eines abgeschlossenen Systems. Das rechtfertigt nachträglich die Idealisierung die man macht, wenn man ausgedehnte Systeme als Massenpunkte auffasst.

**Beispiel: abgeschlossenes System aus 2 Teilchen** Als Beispiel betrachten wir ein abgeschlossenes System mit  $N = 2$ . Wir setzen

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2.$$

Wir nehmen an, dass die Kräfte  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  konservativ und von der oben diskutierten Form sind. Dann gilt

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1 = -\vec{\nabla}_1 u(\vec{r}), \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2 = -\vec{\nabla}_2 u(\vec{r}), \quad u(\vec{r}) = U_{12}(\vec{r}).$$

Da das System abgeschlossen ist, gilt

$$M \ddot{\vec{R}} = 0.$$

Wir definieren die *reduzierte Masse*  $\mu$  als

$$\mu = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Dann gilt

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \mu (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = \mu \left( \frac{1}{m_1} \vec{F}_1 - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2 \right) = \mu \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_1 = -\vec{\nabla} u.$$

Offenbar lässt sich die Relativbewegung der zwei Teilchen als eine Bewegung eines Teilchens mit Masse  $\mu$  im Potential  $u$  auffassen. Es gilt auch

$$E = T + U = E_s + E_{\text{rel}}, \quad E_s = T_s = \frac{M \dot{\vec{R}}^2}{2}, \quad E_{\text{rel}} = T_{\text{rel}} + U, \quad T_{\text{rel}} = \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2}, \quad U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = u(\vec{r})$$

Für  $m_1 = m_2$  gilt  $\mu = \frac{1}{2} m_1 = \frac{1}{2} m_2 = \frac{1}{4} (m_1 + m_2)$ . Für  $m_2 \gg m_1$  gilt  $\mu \approx m_2$ . In diesem Fall ist  $\vec{R} \approx \vec{r}_2$  und damit  $\dot{\vec{r}}_2 \approx 0$ . Man kann also die Bewegung von Teilchen 1 im Ruhesystem von Teilchen 2 betrachten, das annähernd ein Inertialsystem ist.

## 2.6.4 Drehimpuls und -erhaltung

**Ein Punktteilchen** Der Drehimpuls  $\vec{L}$  eines einzelnen Punktteilchens ist definiert als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}.$$

Der Impuls  $\vec{p}$  hängt nicht vom Ursprung  $O$  des Bezugssystems ( $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ) ab, da  $\dot{\vec{r}}$  als relative Größe unabhängig von  $O$  ist (sofern  $O$  zeitlich konstant ist). Im Gegensatz dazu hängt der Drehimpuls explizit von  $O$  ab, da der Ortsvektor  $\vec{r}$  auch ohne Ableitung in seine Definition eingeht.

Für die zeitliche Änderung von  $\vec{L}$  finden wir

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Dabei haben wir verwendet das

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = m \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$$

da das Kreuzprodukt eines Vektors mit sich selbst immer verschwindet. Wir definieren das *Drehmoment*  $\vec{N}$  einer Kraft  $\vec{F}$  als

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

und erhalten somit

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}.$$

Analog zur Tatsache, dass eine Kraft  $\vec{F}$  für die Änderung des Impulses  $\vec{p}$  verantwortlich ist, ist ein Drehmoment  $\vec{N}$  für die Änderung des Drehimpulses  $\vec{L}$  verantwortlich. Wie  $\vec{L}$  ist auch  $\vec{N}$  - im Gegensatz zu  $\vec{F}$  - vom Ursprung  $O$  des Bezugssystems abhängig.

Wenn  $\vec{F}$  parallel zu  $\vec{r}$  ist, also zum Beispiel wenn  $\vec{F}$  ein Zentralkraftfeld ist

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r}) \vec{r}$$

mit einer Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dann verschwindet das Drehmoment

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = f(\vec{r}) \vec{r} \times \vec{r} = 0$$

und der Drehimpuls ist erhalten. Dafür muss nicht unbedingt  $f(\vec{r}) = g(r)$  mit einer Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $r = |\vec{r}|$  gelten, d.h. das Kraftfeld muss nicht rotations-symmetrisch sein.

Ist der Drehimpuls erhalten, so ist es zweckmäßig, ein Bezugssystem  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  so zu wählen, dass  $\vec{L} \parallel \vec{e}_3$ , d.h.

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix}, \quad l = |\vec{L}|.$$

Es gilt

$$\dot{\vec{r}} \cdot \vec{L} = \dot{\vec{r}} \cdot (m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0, \quad \vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \cdot (m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0$$

da das Kreuzprodukt zweier Vektoren immer senkrecht auf beiden Vektoren steht. Ist  $\vec{L}$  konstant, dann spielt sich die gesamte Bewegung des Teilchens also in der Ebene senkrecht zu  $\vec{L}$  ab! Mit der obigen Wahl des Bezugssystems ist das die  $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_2$ -Ebene, es gilt also  $x_3(t) = 0$  für alle  $t$ . Es ist nützlich, die Bewegung in Polarkoordinaten in der  $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_2$  zu beschreiben. Wir setzen also

$$x_1 = r \cos(\varphi), \quad x_2 = r \sin(\varphi), \quad (x_3 = 0,) \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{r} \cos(\varphi) - r \dot{\varphi} \sin(\varphi), & \dot{x}_2 &= \dot{r} \sin(\varphi) + r \dot{\varphi} \cos(\varphi), \\ \vec{L} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m \begin{pmatrix} x_2 \dot{x}_3 - x_3 \dot{x}_2 \\ x_3 \dot{x}_1 - x_1 \dot{x}_3 \\ x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mr^2 \dot{\varphi} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

insbesondere sehen wir, dass  $\dot{r}$  in  $\vec{L}$  herausfällt. Die Größe

$$I = mr^2$$

nennt man *Trägheitsmoment* - in diesem Fall ist es das Trägheitsmoment eines Punktteilchens bezüglich der  $\vec{e}_3$ -Achse. Später bei der Diskussion der Bewegung eines ausgedehnten starren Körpers werden wir sehen, dass so ein Körper im Allgemeinen mehrere Trägheitsmomente hat.

Ingesamt finden wir also

$$l = I\dot{\varphi}$$

und sehen wie der Drehimpuls zu seinem Namen kommt. Ist  $l \neq 0$  und  $r > 0$  dann ist  $\dot{\varphi} \neq 0$  und das Punktteilchen vollführt eine verallgemeinerte Drehung um die  $\vec{e}_3$ -Achse aus - mit konstantem Drehsinn, da das Vorzeichen von  $\dot{\varphi}$  nicht wechseln kann. Diese Bewegung ist eine Drehung im strengen Sinne - d.h. eine kreisförmige Bewegung - wenn zusätzlich  $r$  konstant ist, was nicht notwendigerweise aus der Erhaltung von  $\vec{L}$  folgt. Eine geradlinig-gleichförmige Bewegung in der  $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_2$ -Ebene entspricht z.B. auch einem erhaltenen Drehimpuls. Die formale Ähnlichkeit zwischen Impuls  $\vec{p} = m\vec{r}$  und  $l = I\dot{\varphi}$  ist ebenfalls augenfällig. Insofern kann man das Trägheitsmoment  $I = mr^2$  sinngemäß als "träge Masse bezüglich der Drehung" interpretieren - daher auch der Name.

Wir betrachten nun die kinetische Energie der Punktmasse im Falle eines erhaltenen Drehimpulses. Es gilt

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2.$$

Die kinetische Energie teilt sich also auf in die kinetische Energie der Radialbewegung  $T_r$  und die kinetische Energie der (verallgemeinerten) Drehbewegung  $T_\varphi$

$$T = T_r + T_\varphi, \quad T_r = \frac{1}{2}m\dot{r}^2, \quad T_\varphi = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2.$$

Wenn wir  $p_r = m\dot{r}$  als *Radialimpuls* definieren, dann können wir die kinetischen Energien auch schreiben als

$$T_r = \frac{p_r^2}{2m}, \quad T_\varphi = \frac{l^2}{2I}.$$

Ist  $\vec{F}$  ein konservatives Kraftfeld mit Potential  $U$ , dann ist  $U$  im Allgemeinen eine potentielle Energie für Radial- und Drehbewegung. Gilt allerdings

$$U(\vec{r}) = u(r),$$

d.h.  $\vec{F}$  ist eine rotationssymmetrische Zentralkraft, dann ist  $u(r)$  ein Potential nur für die Radialbewegung. Die Gesamtenergie in diesem Fall ist

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + u(r).$$

Da  $l$  konstant ist, können wir

$$U_{\text{eff}}(r) = u(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

als *effektives Potential* für die Radialbewegung auffassen und die Form von  $E$  entspricht der kinetischen Energie einer eindimensionalen Bewegung im Potential  $U_{\text{eff}}$ . Die Tatsache, dass  $\dot{\varphi}$  in der Gesamtenergie nicht auftaucht, liegt daran, dass  $\dot{\varphi}$  durch die Erhaltung von  $\vec{L}$  bzw.  $l$  ja bereits eindeutig festgelegt ist. Es gilt nämlich

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}.$$

**Mehrere Punktteilchen** Wir betrachten nun mehrere Punktteilchen. Jedes hat einen Drehimpuls

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i.$$

Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}$  des  $N$ -Teilchen-Systems ist definiert als

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i.$$

Es gilt natürlich

$$\vec{N} = \dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{L}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i,$$

das Gesamtdrehmoment ist also die Summe der einzelnen Drehmomente. Wie zuvor betrachten wir den Fall, dass alle  $\vec{F}_i$  von der Form

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U$$

sind, mit

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^N U_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j).$$

Wir wollen nun zusätzlich annehmen, dass

$$U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = u_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

mit Funktionen  $u_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Das ist z.B. erfüllt wenn zwischen den Teilchen Gravitationskräfte, Coloumbkräfte oder harmonische Kräfte wirken. Dann gilt für die inneren Kräfte

$$\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = -\vec{F}_{ji}(\vec{r}_j, \vec{r}_i) = -\vec{\nabla}_i u_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = -u'_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|},$$

wobei  $u'_{ij}$  die Ableitung von  $u_{ij}$  ist. Die Kräfte wirken also entlang der Verbindungsachsen zwischen den Teilchen, d.h.  $\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ . Die äußeren Kräfte sind wie zuvor

$$\vec{F}_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i) = -\vec{\nabla}_i U_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i).$$

Wir berechnen für diesen Fall das Gesamtdrehmoment.

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}.$$

Den zweiten Term kann man umschreiben als

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}.$$

In der ersten Gleichung haben wir einfach den Term in zwei Hälften aufgeteilt und bei der 2. Hälfte die Rollen von  $i$  und  $j$  vertauscht; das können wir tun, da die Summenvorschriften  $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N$  und  $\sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N$  identisch sind. In der zweiten Gleichung haben wir verwendet, dass  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ . Da nach Annahme  $\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$  gilt, verschwindet also jeder Summand und damit die ganze Summe. Folglich gilt

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}}.$$

Wir finden also, unter der Annahme, dass die Kräfte zwischen den Teilchen entlang der Verbindungsachsen wirken - diese Annahme wollen wir im Folgenden immer treffen -

In einem Vielteilchensystem, in dem die Summe der äußeren Kräfte verschwindet, ist der Gesamtdrehimpuls erhalten. Insbesondere ist der Gesamtdrehimpuls in einem abgeschlossenen System erhalten.

Man beachte die Analogie zur Erhaltung des Gesamtimpulses  $\vec{P}$ .

Der Gesamtdrehimpuls lässt sich wie die kinetische Energie in einen Schwerpunkts- und einen Relativanteil zerlegen.

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{R} + \vec{x}_i) \times (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{x}}_i) \\ &= \vec{R} \times \vec{P} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i + \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i \\ &= \vec{L}_S + \vec{L}_{\text{rel}}, \quad \vec{L}_S = \vec{R} \times \vec{P}, \quad \vec{L}_{\text{rel}} = \vec{L} - \vec{L}_S \end{aligned}$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) = M\vec{R} - M\vec{R} = \vec{0}.$$

Im Fall konstanter Massen  $m_i$  folgt daraus

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i = \vec{0}.$$

In diesem Fall ist also

$$\vec{L}_{\text{rel}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i + \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i$$

und  $\vec{L}_{\text{rel}}$  lässt sich als Drehimpuls des Systems bezogen auf den Schwerpunkt als Ursprung auffassen. Insbesondere ist  $\vec{L}_{\text{rel}}$  – im Gegensatz zu  $\vec{L}$  und  $\vec{L}_s$  – also unabhängig vom Ursprung des Bezugssystems, in dem wir die Ortsvektoren  $\vec{r}_i$  ausdrücken.

Wir wissen bereits, dass in einem System in dem die Summe der äußeren Kräfte verschwindet, insbesondere also in einem abgeschlossenen System, der Gesamtimpuls  $\vec{P}$  erhalten ist. Da

$$\dot{\vec{L}}_s = \dot{\vec{R}} \times \vec{P} + \vec{R} \times \dot{\vec{P}}$$

und, im Fall konstanter Massen  $m_i$ ,

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}},$$

gilt also, dass in einem abgeschlossenen System  $\vec{L}_s$  eine Erhaltungsgröße ist. In diesem Fall ist natürlich  $\vec{L}$  selbst auch erhalten, und damit auch  $\vec{L}_{\text{rel}} = \vec{L} - \vec{L}_s$ .

Für ein Zweiteilchensystem mit konstanten Massen  $m_1, m_2$  hat  $\vec{L}_{\text{rel}}$  analog zu  $T_{\text{rel}}$  eine besonders einfache Form. Es gilt ( $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ )

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \vec{r}_1 - \vec{R} = \vec{r}_1 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2)\vec{r}_1 - m_1\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{x}_2 &= \vec{r}_2 - \vec{R} = \vec{r}_2 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2)\vec{r}_2 - m_1\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}\end{aligned}$$

und damit, unter der Annahme  $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = 0$ ,

$$\begin{aligned}\vec{L}_{\text{rel}} &= m_1 \vec{x}_1 \times \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \vec{x}_2 \times \dot{\vec{x}}_2 \\ &= \left( m_1 \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \right) \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}.\end{aligned}$$

Der relative Drehimpuls lässt sich also interpretieren als Drehimpuls eines Teilchens mit Masse  $\mu$  am Ort  $\vec{r}_1$  bezüglich  $\vec{r}_2$  als Ursprung – oder umgekehrt, denn mit

$$\vec{r}' = -\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

gilt auch

$$\vec{L}_{\text{rel}} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu \vec{r}' \times \dot{\vec{r}}'.$$

## 2.6.5 Zusammenfassung der Erhaltungsgrößen

Wir fassen die gefundenen Erhaltungsgrößen für ein “typisches” System von  $N$  Teilchen zusammen. Mit “typisch” meinen wir:

1. Das System ist abgeschlossen, d.h.  $\vec{F}_i^{\text{ext}} = 0$  für alle  $i$ .
2. Alle inneren Kräfte sind konservativ mit Potentialen die nur von den Verbindungsvektoren abhängen, d.h.  $\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = -\vec{\nabla}_i U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\vec{F}_{ji}(\vec{r}_j, \vec{r}_i)$ .

- Die Potentiale hängen nur vom Betrag der Verbindungsvektoren ab, d.h.  $U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = u_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ , und damit insbesondere  $\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ .
- Die Massen  $m_i$  sind alle konstant.

Unter diesen Annahmen sind folgende Größen zeitlich erhalten.

- der Gesamtimpuls  $\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i$
- die Gesamtenergie  $E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N U_{ij}$
- $\vec{R}(t) - \frac{\vec{P}}{M}t = \vec{R}(0)$ , mit  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  und  $\vec{R}(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i(t)$
- der Gesamtdrehimpuls  $\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$
- die Schwerpunktsenergie  $E_s = \frac{\vec{P}^2}{2M} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$  und die Relativenergie  $E_{\text{rel}} = E - E_s$
- der Schwerpunktsdrehimpuls  $\vec{L}_s = \vec{R} \times \vec{P}$  und der Relativedrehimpuls  $\vec{L}_{\text{rel}} = \vec{L} - \vec{L}_s$

Die ersten vier Erhaltungsgrößen - eigentlich zehn: drei Dreiervektoren und ein Skalar - sind dabei von zentraler Bedeutung. Wir werden später sehen, dass sie direkt aus den Symmetrien des Systems abgeleitet werden können.

## 2.7 Das Kepler-Problem

Das Kepler-Problem ist die Berechnung der Bahnkurven in einem abgeschlossenen Zweiteilchensystem mit konstanten Massen  $m_1, m_2$  für das Potential

$$U(r) = -\frac{\kappa}{r}, \quad r = |\vec{r}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|, \quad \kappa \text{ konst. .}$$

Für  $\kappa = Gm_1m_2 > 0$  ist  $U$  das Gravitationspotential und man interpretiert das System als ein Modell für die Bewegung eines Planeten um die Sonne. Dieses Modell ist in der Hinsicht eine Vereinfachung, dass man die übrigen Planeten im Sonnensystem vernachlässigt. Trotzdem liefert es sehr gute Ergebnisse für die Bahnkurven der Planeten, die sich, wie wir wissen, auf Ellipsen um die Sonne bewegen. Das obige Potential kann aber auch die Coloumb-Kraft zwischen zwei geladenen Teilchen beschreiben, dabei ist  $\kappa > 0 (< 0)$  bei gleichem (unterschiedlichem)

Ladungsvorzeichen. Für  $\kappa < 0$  ist das Potential *abstoßend* und die entsprechenden Bahnkurven beschreiben die *Streuung* von geladenen Teilchen.

Johannes Kepler hat aus sehr genauen Positionsbestimmungen der Planeten im Sonnensystem im frühen 17. Jh. drei empirische Gesetze für die Bewegung der Planeten abgeleitet - die *Kepler'schen Gesetze*.

1. Die Bahn jedes Planeten ist eine Ellipse mit der Sonne in einem der beiden Brennpunkte.
2. Der Fahrstrahl Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Das Quadrat der Umlaufzeit eines Planeten ist proportional zur Kubikzahl der großen Halbachse seiner Bahn.

Newton hat dann im späten 17. Jh. aus den Newton'schen Gesetzen wiederum die Kepler'schen Gesetze ableiten können - ein großer Erfolg seiner Theorie und ein Glanzstück der theoretischen Physik.

Um das Kepler-Problem (erneut) zu lösen, wiederholen wir einige für dieses Problem relevante Sachverhalte, die wir im Kontext von Zweiteilchensystemen als Beispiele für Mehrteilchensysteme bereits diskutiert haben.

Da es sich um ein abgeschlossenes System mit konstanten Massen handelt, wissen wir sofort, dass der Schwerpunkt sich geradlinig-gleichförmig bewegt

$$\vec{R}(t) = \frac{m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t)}{M} = \frac{\vec{P}}{M} t + \vec{R}(0)$$

mit dem (erhaltenen) Gesamtimpuls  $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$  und der Gesamtmasse  $M = m_1 + m_2$ . Damit ist die Schwerpunktsbewegung gelöst und es bleibt das Problem der Lösung der Relativbewegung, d.h. die Bestimmung von  $\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$ . Denn nachdem wir  $\vec{r}(t)$  bestimmt haben, ergeben sich  $\vec{r}_1(t)$  und  $\vec{r}_2(t)$  als

$$\vec{r}_1(t) = \vec{R}(t) + (\vec{r}_1(t) - \vec{R}(t)) = \vec{R}(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}(t),$$

$$\vec{r}_2(t) = \vec{R}(t) + (\vec{r}_2(t) - \vec{R}(t)) = \vec{R}(t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}(t).$$

Da zusätzlich das Potential von der Form  $U = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$  ist, ist der Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}$  eine Erhaltungsgröße und darüber hinaus sind Schwerpunkts- und Relativdrehimpuls  $\vec{L}_S$  und  $\vec{L}_{\text{rel}}$  separat erhalten. Es gilt

$$\vec{L}_{\text{rel}} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

mit der reduzierten Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Da  $\vec{L}_{\text{rel}}$  erhalten ist, spielt sich die Bewegung von  $\vec{r}$  vollständig in einer Ebene senkrecht zu  $\vec{L}_{\text{rel}}$  ab. Wenn wir Koordinaten so wählen, dass

$$\vec{L}_{\text{rel}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix}, \quad l = |\vec{L}_{\text{rel}}|$$

ist, dann ist das die  $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_2$ -Ebene und es gilt  $x_3(t) = 0$ . In dieser Ebene wählen wir Polarkoordinaten

$$x_1 = r \cos(\varphi), \quad x_2 = r \sin(\varphi).$$

Dann gilt

$$l = \mu r^2 \dot{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}.$$

Damit ist die Winkelbewegung  $\varphi(t)$  gelöst, sobald die Radialbewegung  $r(t)$  gelöst ist. Denn ist  $r(t)$  bekannt, dann auch  $\dot{\varphi}(t)$  und wir bekommen  $\varphi(t)$  durch einmaliges integrieren nach der Zeit.

Die noch zu lösende Radialbewegung ist eine eindimensionale Bewegung und wir wissen, dass in einem abgeschlossenen System mit konservativen inneren Kräften sowohl die Gesamtenergie  $E$  als auch die Relativenergie  $E_{\text{rel}}$  erhalten sind. Wir können also die uns bekannte Lösungsmethode verwenden: wir bestimmen die Geschwindigkeit aus der Gesamtenergie und integrieren einmal um die Bahnkurve zu erhalten.

Die Relativenergie  $E_{\text{rel}}$  ist (Übungen)

$$E_{\text{rel}} = T_{\text{rel}} + U = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\kappa}{r}.$$

Wir haben bereits berechnet, dass die kinetische Energie sich zusammensetzt aus einem radialen und einem Winkelanteil.

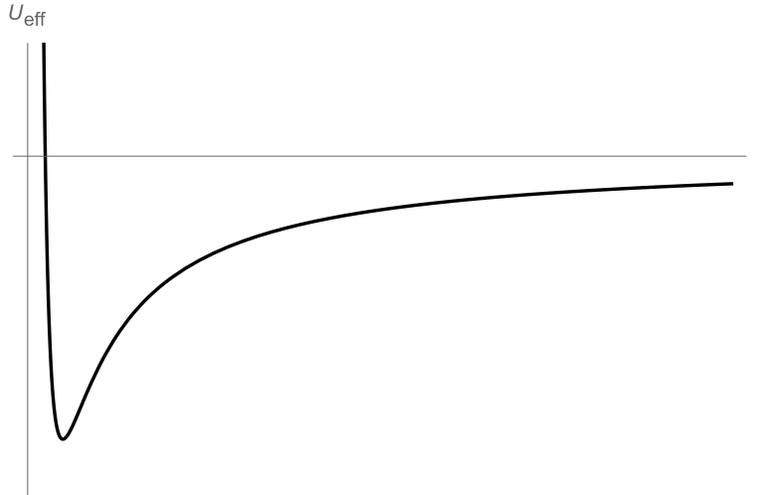
$$T_{\text{rel}} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Wir finden also

$$E_{\text{rel}} = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r), \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\kappa}{r}.$$

Folglich haben wir es mit einer eindimensionalen Bewegung im effektiven Potential  $U_{\text{eff}}$  zu tun.

Das Potential ist (für  $l > 0$ ) im Folgenden abgebildet. Geometrisch ist  $r$  auf positive Werte festgelegt. Das ist mit dem gefundenen Effektivpotential verträglich, da  $U_{\text{eff}}(r)$  für  $r$  gegen 0 unendlich groß wird. Das "Teilchen" benötigt also unendlich viel Energie um überhaupt zum Ursprung zu gelangen, es sei denn  $l = 0$ . Den abstoßenden Teil  $\frac{l^2}{2\mu r^2}$  nennt man daher *Zentrifugalbarriere* oder *Zentrifugalpotential*, in Anspielung auf die Zentrifugal(schein)kraft die auf ein sich drehendes Teilchen (scheinbar) wirkt. Falls  $l = 0$ , d.h. der Drehimpuls verschwindet, dann ist auch  $\dot{\varphi} = 0$  und daher  $\varphi$  konstant. Für die Planetenbewegung ist dieser Fall natürlich



nicht relevant. Er entspricht einer Bahn, bei der sich die Teilchen entlang der Verbindungslinie voneinander weg- oder aufeinander zubewegen.

Für den relevanten Fall  $l > 0$  hat  $U_{\text{eff}}(r)$  ein Minimum bei  $r_1 = \frac{l^2}{\kappa\mu}$ , an dieser Stelle ist  $U_{\text{eff}}(r_1) = U_0 = -\frac{\kappa^2\mu}{2l^2}$ . Wir können nun vier Fälle unterscheiden:

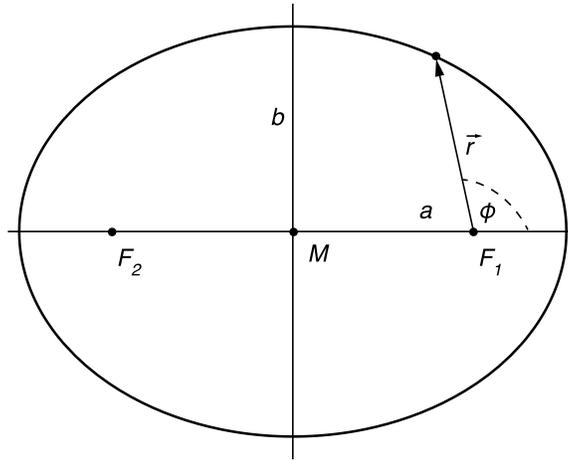
1.  $E_{\text{rel}}$  hat den minimalen Wert  $E_{\text{rel}} = U_0$ . In diesem Fall ist  $T_{\text{rel}} = 0$  d.h.  $\dot{r} = 0$ . Teilchen 1 bewegt sich bezüglich Teilchen 2 auf einer perfekten Kreisbahn mit Radius  $r = r_1$  - und umgekehrt. Die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r_1^2}$  ist konstant.
2.  $U_0 < E_{\text{rel}} < 0$ .  $r$  oszilliert um  $r_1$ , dabei sind minimale und maximale Annäherungen  $r_{\text{min}}$ ,  $r_{\text{max}}$  endlich und durch  $E_{\text{rel}} = U_{\text{eff}}(r_{\text{min}}) = U_{\text{eff}}(r_{\text{max}})$  festgelegt. Wegen  $\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$  ist  $\dot{\varphi}$  bei  $r_{\text{min}}$  maximal und bei  $r_{\text{max}}$  minimal und oszilliert zwischen diesen Werten. Wie wir später sehen werden sind die entsprechenden Bahnen *Ellipsen*.
3.  $E_{\text{rel}} = 0$ . Es ist gerade genug kinetische Energie vorhanden, dass die zwei Massenpunkte sich (in unendlich großer Zeit) unendlich weit voneinander entfernen können, d.h.  $r_{\text{max}} = \infty$ . Die entsprechende Bahn stellt sich als eine *Parabel* heraus. Sind die Anfangsbedingungen so, dass  $\dot{r}(0) < 0$  dann nähern sich die Massenpunkte zunächst bis auf  $r_{\text{min}}$  an und entfernen sich dann unbeschränkt.
4.  $E_{\text{rel}} > 0$ . Analog zum Fall  $E_{\text{rel}} = 0$  gilt  $r_{\text{max}} = \infty$ . Die entsprechenden Bahnen sind allerdings *Hyperbeln*.

Bevor wir diese Bahnformen verifizieren, wollen wir zunächst Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln mathematisch zusammenhängend diskutieren. Diesen Figuren ist gemein, dass sie sich allesamt als *Kegelschnitte*, d.h. als Schnitte eines (Doppel-)Kegels mit einer Ebene erhalten lassen.

**Ellipse** Wir betrachten zwei Punkte  $F_1$  und  $F_2$ .  $M$  sei der Mittelpunkt dieser beiden Punkte. Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte  $P$  für die gilt

$$|\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| = 2a, \quad a > 0.$$

$a$  nennt man dabei die *große Halbachse* der Ellipse und  $F_1, F_2$  ihre *Brennpunkte*. Wir definieren



$$\vec{r} = \overrightarrow{F_1P}, \quad \vec{e} = \overrightarrow{MF_1} = -\overrightarrow{MF_2}.$$

Es seien zusätzlich *Exzentrizität*  $\epsilon$ , *kleine Halbachse*  $b$  und der Winkel  $\varphi$  definiert als

$$\epsilon = \frac{|\vec{e}|}{a}, \quad b^2 = a^2 - \vec{e}^2 = a^2(1 - \epsilon^2), \quad \cos(\varphi) = \frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{|\vec{e}| |\vec{r}|}.$$

Dann folgt aus der Definition der Ellipse

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| &= |\vec{r}| + |\vec{r} + 2\vec{e}| = 2a \\ \Leftrightarrow (r - 2a)^2 &= (\vec{r} + 2\vec{e})^2 \\ \Leftrightarrow r^2 - 4ar + 4a^2 &= r^2 + 4\vec{r} \cdot \vec{e} + 4\vec{e}^2 \\ \Leftrightarrow -4ar + 4a^2 &= 4ar\epsilon \cos(\varphi) + 4a^2\epsilon^2 \\ \Leftrightarrow a(1 + \epsilon \cos(\varphi))r &= a^2(1 - \epsilon^2) = b^2 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{b^2}{a(1 + \epsilon \cos(\varphi))}. \end{aligned}$$

Mit  $p = \frac{b^2}{a}$  finden wir also die sogenannte *Polargleichung* für eine Ellipse:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}.$$

Sie gibt an wie  $r$  vom Winkel abhängt. Offenbar gilt

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \epsilon}, \quad r_{\max} = \frac{p}{1 - \epsilon}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad \epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1.$$

Wählen wir Koordinaten so, dass  $M$  der Ursprung ist, die Brennpunkte auf der  $\vec{e}_1$ -Achse liegen und die Ellipse in der  $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_2$ -Ebene liegt, dann gilt für die Punkte auf der Ellipse

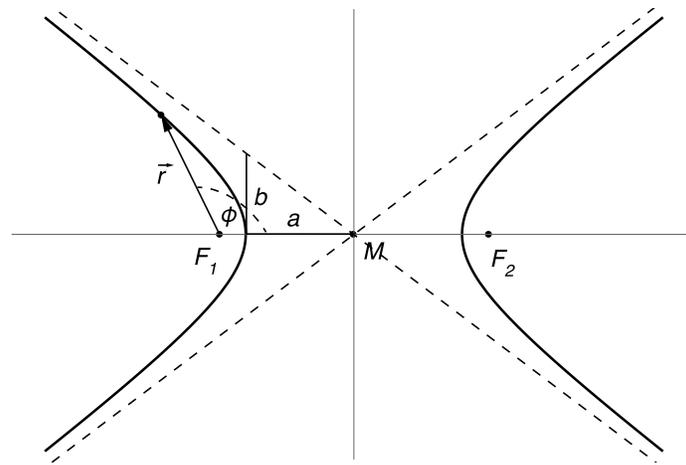
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

Für  $\epsilon = 0$  bekommen wir den Spezialfall eines Kreises mit  $r = p = a = b$  und  $F_1 = F_2$ .

**Hyperbel** Analog zur Ellipse ist eine Hyperbel mit Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$  definiert als die Menge aller  $P$  mit

$$|\overrightarrow{F_1P}| - |\overrightarrow{F_2P}| = \pm 2a, \quad a > 0.$$

In der folgenden Abbildung haben wir die Benennung der Brennpunkte vertauscht um die Verwandtschaft von Ellipse und Hyperbel zu verdeutlichen. Im Fall von  $+2a$  spricht man vom *rechten*



Ast und im Fall von  $-2a$  vom *linken* Ast. Wir betrachten im folgenden den linken Ast (der rechte ist relevant für  $\kappa < 0$ ). Wir definieren, ähnlich wie bei der Ellipse,

$$\vec{r} = \overrightarrow{F_1P}, \quad \vec{e} = \overrightarrow{MF_2} = -\overrightarrow{MF_1}.$$

$$\epsilon = \frac{|\vec{e}|}{a}, \quad b^2 = \vec{e}^2 - a^2 = a^2(\epsilon^2 - 1), \quad \cos(\varphi) = \frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{|\vec{e}| |\vec{r}|}.$$

und finden

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{F_1P}| - |\overrightarrow{F_2P}| &= |\vec{r}| - |\vec{r} - 2\vec{e}| = -2a \\ \Leftrightarrow (r + 2a)^2 &= (\vec{r} - 2\vec{e})^2 \\ \Leftrightarrow r^2 + 4ar + 4a^2 &= r^2 - 4\vec{r} \cdot \vec{e} + 4\vec{e}^2 \\ \Leftrightarrow 4ar + 4a^2 &= -4ar\epsilon \cos(\varphi) + 4a^2\epsilon^2 \\ \Leftrightarrow a(1 + \epsilon \cos(\varphi))r &= a^2(\epsilon^2 - 1) = b^2 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{b^2}{a} \frac{1}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}, \end{aligned}$$

also die Polargleichung

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}.$$

Für die Hyperbel gilt

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \epsilon}, \quad r_{\max} = \infty, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1.$$

Es gibt außerdem einen minimalen und maximalen Winkel  $\varphi_{\min}$ ,  $\varphi_{\max} = -\varphi_{\min}$  mit

$$1 + \epsilon \cos(\varphi_{\min}) = 1 + \epsilon \cos(\varphi_{\max}) = 0.$$

In der  $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_2$ -Ebene lässt sich die Hyperbel (beide Äste) festlegen durch

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

Die minimalen und maximalen Winkel entsprechen asymptotischen Geraden durch den Ursprung. Die Steigung dieser Geraden lässt sich aus obiger Gleichung ablesen. Für  $x_1 \rightarrow \infty$ ,  $x_2 \rightarrow \infty$  gilt

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_2}{x_1} = \pm \frac{b}{a}.$$

**Parabel** Eine Parabel ist die Menge aller Punkte  $P$  die von einem (Brenn-)Punkt  $F_1$  und einer Leitlinie  $L$  jeweils gleich weit entfernt sind. Wenn  $p$  der Abstand zwischen  $F_1$  und  $L$  ist und  $\varphi$  der Winkel zwischen  $\vec{r} = \overrightarrow{F_1 P}$  und  $\vec{e}$ , wobei  $\vec{e} = \overrightarrow{F_1 L}$  der Vektor ist, der (auf kürzestem Weg)  $F_1$  und  $L$  verbindet, dann findet man die Polargleichung

$$r = \frac{p}{1 + \cos(\varphi)}.$$

In kartesischen Koordinaten mit dem Scheitelpunkt der Parabel im Ursprung gilt

$$x_2^2 = -2px_1.$$

Wir finden also für alle Fälle die Polargleichung

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \epsilon = 0 & \text{Kreis} \\ 0 < \epsilon < 1 & \text{Ellipse} \\ \epsilon = 1 & \text{Parabel} \\ \epsilon > 1 & \text{Hyperbel} \end{cases}.$$

Wir kehren zurück zum Keplerproblem. Um  $r(t)$  zu bestimmen können wir die Methode aus Abschnitt 2.5.1 verwenden. Wir lösen

$$E_{\text{rel}} = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \text{konst.}$$

nach  $\dot{r}$  auf

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2(E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r))}{\mu}}$$

und integrieren. Die entsprechenden Integrale sind allerdings nicht einfach lösbar. Daher wollen wir uns statt der Bahnkurven der Massenpunkte lieber die Bahnen anschauen. Wie bereits erwähnt können wir im Prinzip  $r(t)$  und daraus  $\varphi(t)$  bestimmen. Die Umkehrfunktion von  $\varphi(t)$ , d.h.  $t(\varphi)$ , gibt uns den Zeitpunkt an dem  $\varphi$  einen bestimmten Wert hat. Setzen wir diesen Wert in  $r(t)$  ein, bekommen wir  $r(t(\varphi))$ , d.h.  $r(\varphi)$ , den Wert von  $r$  für einen gegebenen Winkel. Wie wir am Beispiel der Polargleichungen für die Kegelschnitte gesehen haben, lässt sich aus  $r(\varphi)$  die Bahn (des 2. Massenpunktes bezügl. des 1.) ablesen. Um  $r(\varphi)$  zu bestimmen, bemerken wir dass

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{\sqrt{\frac{2(E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r))}{\mu}}}{\frac{l}{\mu r^2}} = \frac{\sqrt{2\mu}}{l} r^2 \sqrt{(E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r))}$$

Analog zum Abschnitt 2.5.1 folgern wir daraus, dass

$$\frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{(E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r'))}} = \varphi - \varphi_0.$$

Dieses Integral lässt sich analytisch berechnen. Man findet

$$\frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{(E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r'))}} = \arccos\left(\frac{pr^{-1} - 1}{\epsilon}\right) - \arccos\left(\frac{pr_0^{-1} - 1}{\epsilon}\right),$$

$$p = \frac{l^2}{\mu \kappa}, \quad \epsilon = \sqrt{1 - \frac{E_{\text{rel}}}{U_0}},$$

mit dem Arkuskosinus  $\arccos$  der die Umkehrfunktion des Kosinus ist. Wir erinnern uns, dass aus  $\dot{r}$  nur  $\dot{\varphi}$  ableitbar ist und  $\varphi_0$  daher unabhängig von  $r_0$  frei gewählt werden kann. Wir wählen  $r_0$  und  $\varphi_0$  so, dass

$$r_0 = \frac{p}{1 + \epsilon}, \quad \varphi_0 = 0.$$

Damit finden wir

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)},$$

also die Polargleichung für einen Kegelschnitt. Wie bereits vorweggenommen, finden wir

1. Wenn  $U_0 \leq E_{\text{rel}} < 0$ , d.h.  $0 \leq \epsilon < 1$  ist die Bahn eine Ellipse. Dieser Fall ist relevant für die Planetenbahnen im Sonnensystem. Damit ist das 1. Kepler'sche Gesetz verifiziert. Für  $E_{\text{rel}} = U_0$ , d.h.  $\epsilon = 0$ , haben wir als Spezialfall einen Kreis. Im Sonnensystem findet man z.B. für Merkur  $\epsilon = 0.206$ , für die Erde  $\epsilon = 0.017$ , Mars  $\epsilon = 0.093$ . Der Komet Halley hat  $\epsilon = 0.967$  und ist damit "nur sehr leicht gebunden".

2. Wenn  $E_{\text{rel}} \geq 0$ , d.h.  $\epsilon \geq 1$  ist die Bahn eine Hyperbel (oder eine Parabel bei  $\epsilon = 1$ ). Dieser Fall ist relevant für Himmelsobjekte, die genug Energie besitzen um das Sonnensystem zu verlassen.

Wir wollen nun das 2. Kepler'sche Gesetz verifizieren, d.h. die Tatsache, dass der Fahrstrahl Sonne-Planet in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Zwischen  $t$  und  $t + dt$  ändert sich  $\vec{r}(t)$  zu  $\vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t)dt$ . Der Fahrstrahl überstreicht also zwischen  $t$  und  $t + dt$  eine Fläche  $dA$  die der Fläche des Dreiecks, das durch  $\vec{r}(t)$  und  $\dot{\vec{r}}(t)dt$  aufgespannt wird entspricht. Die Fläche eines Dreiecks, das durch  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannt wird ist  $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$ , d.h. wir finden

$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|dt = \frac{1}{2\mu}|\vec{L}_{\text{rel}}|dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2\mu}|\vec{L}_{\text{rel}}| = \frac{l}{2\mu} = \text{konst.}$$

Das 2. Kepler'sche Gesetz folgt also direkt aus der Erhaltung des relativen Drehimpulses - und damit aus der Tatsache, dass die Gravitationskraft eine rotationssymmetrische Zentralkraft ist.

Das 3. Kepler'sche Gesetz besagt schließlich, dass das Quadrat der Umlaufzeit eines Planeten proportional zur Kubikzahl der großen Halbachse seiner Bahn ist. Um das zu verifizieren, berechnen wir zunächst die große und kleine Halbachse der Bahn. Es gilt

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{l^2}{\mu\kappa}, \quad \epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{E_{\text{rel}}}{U_0}}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{p}{1 - \epsilon^2} = \frac{l^2 U_0}{\mu\kappa E_{\text{rel}}} = -\frac{\kappa}{2E_{\text{rel}}} = \frac{\kappa}{2|E_{\text{rel}}|}, \quad b = \sqrt{pa} = \sqrt{\frac{l^2}{2\mu|E_{\text{rel}}|}}.$$

Die Fläche der Ellipse ist

$$A_{\text{tot}} = \pi ab = \pi \frac{\kappa}{2|E_{\text{rel}}|} \sqrt{\frac{l^2}{2\mu|E_{\text{rel}}|}}$$

Wegen  $\dot{A} = l/(2\mu) = \text{konst.}$  für den Fahrstrahl, und der Tatsache, dass der Fahrstrahl in der Umlaufzeit  $T$  die gesamte Fläche  $A_{\text{tot}}$  überstreicht, gilt

$$T = \frac{A_{\text{tot}}}{\dot{A}} = \frac{\pi \frac{\kappa}{2|E_{\text{rel}}|} \sqrt{\frac{l^2}{2\mu|E_{\text{rel}}|}}}{l/(2\mu)} = \pi \frac{\kappa}{|E_{\text{rel}}|} \sqrt{\frac{\mu}{2|E_{\text{rel}}|}} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\kappa}} a^{\frac{3}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad T^2 = 4\pi^2 \frac{\mu}{\kappa} a^3.$$

Wir wollen uns den Proportionalitätsfaktor genauer ansehen. Es gilt

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{\mu}{\kappa} = 4\pi^2 \frac{1}{G(m_1 + m_2)}$$

Für die Planetenbewegung ist  $m_2 = m_{\text{Sonne}} \gg m_1$ , also

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{1}{Gm_{\text{Sonne}}}.$$

Aus dem Radius der Erdbahn und der Umlaufzeit der Erde können wir also die Masse der Sonne ableiten!

In der Diskussion der Planetenbahnen haben wir insbesondere gefunden, dass diese *geschlossen* sind. Eine Bahn nennt man geschlossen, wenn eine natürliche Zahl  $n$  existiert, so dass  $r(\varphi) = r(\varphi + 2n\pi)$ , d.h. nach  $n$  Umläufen hat  $r$  wieder denselben Wert - wie haben gefunden, dass das der Fall ist für  $n = 1$ . Diese Tatsache lässt darauf schließen, dass es im Kepler-Problem eine weitere Erhaltungsgröße geben muss. Wie in den Übungen diskutiert, ist das der *Runge-Lenz-Vektor*

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} + U\vec{r}.$$

Wir wollen diesen Vektor nun geometrisch interpretieren. Da  $\vec{A}$  konstant ist, kann man  $\vec{A}$  zu jedem Zeitpunkt der Bewegung bestimmen, z.B. zu dem Zeitpunkt an dem  $r = r_{\min}$  gilt. Dann ist  $\dot{\vec{r}} \parallel \vec{e}_1$ ,  $\dot{\vec{r}} \parallel \vec{e}_2$  und  $\vec{L} \parallel \vec{e}_3$ . Damit ist auch  $(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) \parallel \vec{e}_1$  und  $\vec{A} \parallel \vec{e}_1$  - man kann zeigen, dass  $\vec{A}$  und  $\vec{e}_1$  in dieselbe Richtung zeigen, d.h.  $\vec{A}$  zeigt vom Brennpunkt zum Perihel. Die Erhaltung von  $\vec{A}$  lässt sich also interpretieren als zeitliche Erhaltung des Vektors in Richtung des minimalen  $r$ , des *Perihels*. In den Übungen haben wir gesehen, dass  $\vec{A}$  wegen der Form des Gravitationspotentials exakt erhalten ist, für andere Potentiale, bzw. Abweichungen vom Gravitationspotential aber nicht. Tatsächlich beobachtet man, dass z.B. der Perihel des Merkurs nicht konstant ist, sondern sich dreht. Eine vollständige Erklärung dieser Periheldrehung ist nur im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie möglich, die u.a. vorhersagt, dass das Gravitationspotential nicht exakt  $U = -\frac{\kappa}{r}$  ist, sondern etwas davon abweicht.

## 2.8 Galileitransformationen

Wie bereits besprochen, gilt in der klassischen Mechanik das Relativitätsprinzip - die physikalischen Gesetze haben in allen Inertialsystemen dieselbe Form, sind also in allen Inertialsystemen gültig. Wir haben bereits festgestellt, dass für zwei Bezugssysteme  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  und  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  gilt: wenn  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  ein Inertialsystem ist und es gilt, dass

$$\vec{O'O}(t) = \vec{w}t + \vec{s},$$

d.h.  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  bewegt sich relativ zu  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  geradlinig-gleichförmig, dann ist  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  ebenfalls ein Inertialsystem. Außerdem gilt für die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  im Bezugssystem  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  und die Bahnkurve  $\vec{r}'(t)$  im Bezugssystem  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  die Beziehung.

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{w}t + \vec{s}.$$

Wie besprochen zeichnen sich Inertialsysteme dadurch aus, dass kräftefreie Bewegungen in diesen Systemen geradlinig gleichförmig sind. Die Bahnkurve eines Massenpunktes im Inertialsystem  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  im Fall verschwindender Kraft  $\vec{F} = 0$  ist also

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

mit  $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}} = \text{konst.}$  und  $\vec{r}_0 = \text{konst.}$ . Insbesondere gilt  $\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$ .  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  ist genau dann ebenfalls ein Inertialsystem, wenn für diese Bahnkurve in diesem Bezugssystem ebenfalls  $\ddot{\vec{r}}' = \vec{0}$

gilt. Für  $(O', \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  wie oben gilt  $\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}}$  und diese Bedingung ist erfüllt. Wir wollen nun untersuchen, ob es noch andere Möglichkeiten gibt, ein Bezugssystem relativ zu einem gegebenen Inertialsystem in der Art abzuändern, dass das resultierende Bezugssystem wieder inertial ist.

Als erstes betrachten wir die Transformation

$$t \mapsto t' = t + \tau$$

mit einer Konstante  $\tau$ . Diese *Zeittranslation* entspricht einer Verschiebung des Zeitnullpunktes, d.h. des Ursprungs auf der Zeitachse. Unsere Intuition besagt, dass so eine Verschiebung für die Gültigkeit physikalischer Gesetze keine Rolle spielt. Gegeben eine Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  bezüglich eines Inertialsystems und bezüglich einer Wahl der Zeitkoordinate  $t$  können wir diese Bahnkurve bezüglich der neuen Zeitkoordinate  $t'$  ausdrücken als

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t') = \vec{r}(t + \tau).$$

Wir berechnen nun die Geschwindigkeit von  $\vec{r}'$ .

$$\dot{\vec{r}}'(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}'(t) = \frac{dt'}{dt} \frac{d}{dt'} \vec{r}(t') = \frac{d(t + \tau)}{dt} \frac{d}{dt'} \vec{r}(t') = \frac{d}{dt'} \vec{r}(t') = \dot{\vec{r}}(t + \tau).$$

Genauso gilt

$$\ddot{\vec{r}}'(t) = \frac{d^2}{dt'^2} \vec{r}(t') = \ddot{\vec{r}}(t + \tau),$$

und damit

$$\ddot{\vec{r}}' = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = \vec{0}.$$

Für die Aussage ob ein Bezugssystem inertial ist, bzw. ob eine Bewegung geradlinig gleichförmig ist, spielt die Wahl des Zeitnullpunktes also keine Rolle! Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen, nehmen wir die Wahl des Zeitnullpunktes, bzw. der Zeitkoordinaten, in eine erweiterte Definition eines Bezugssystems auf. Wir schreiben also

$$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, t)$$

und sagen dass dieses erweiterte Bezugssystem inertial ist, wenn darin kräftefreie Bewegung geradlinig gleichförmig ist. Wir wissen bereits, dass

$$(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, t')$$

ebenfalls inertial ist, wenn – zum Beispiel –

$$\overrightarrow{O'O}(t) = \vec{w}t + \vec{s}, \quad t' = t + \tau, \quad \vec{e}'_i = \vec{e}_i$$

mit  $\vec{w}$ ,  $\vec{s}$ ,  $\tau$  konstant gilt. Gibt es noch andere  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, t')$  für die das gilt? Die Basisvektoren  $\vec{e}_i$  legen bei Wahl eines Ursprungs  $O$  die Richtung der Koordinatenachsen fest, und bilden ein rechtshändiges Koordinatensystem, d.h. es gilt

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2.$$

Unsere Erfahrung besagt, dass die Wahl dieser Koordinatenachsen keine Rolle spielt, solange das Koordinatensystem rechtshändig bleibt. Wir können z.B. die Koordinatenachsen rotieren. Es sei  $D$  eine konstante Drehmatrix, z.B. (Drehung um  $\vec{e}_3$ -Achse mit Winkel  $\theta$ )

$$D = D(3, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir können nun neue Basisvektoren definieren als

$$\vec{e}'_i = D^{-1}\vec{e}_i \quad \Leftrightarrow \quad \vec{e}_i = D\vec{e}'_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Es gilt

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 (\vec{r} \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i.$$

Wir definieren nun

$$\vec{r}' = D\vec{r} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 x'_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 (\vec{r}' \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i$$

und finden

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 (\vec{r} \cdot \vec{e}'_i) \vec{e}'_i = \sum_{i=1}^3 (\vec{r} \cdot D^{-1}\vec{e}_i) \vec{e}'_i = \sum_{i=1}^3 (\vec{r} \cdot D^T \vec{e}_i) \vec{e}'_i = \sum_{i=1}^3 (D\vec{r} \cdot \vec{e}_i) \vec{e}'_i = \sum_{i=1}^3 (\vec{r}' \cdot \vec{e}_i) \vec{e}'_i = \sum_{i=1}^3 x'_i \vec{e}'_i.$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass  $D^{-1} = D^T$ , d.h. dass eine Drehmatrix orthogonal ist. Es gilt also, dass  $\vec{r}'$  der Vektor ist, dessen Komponenten  $x'_i$  (in der Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$ ) gerade die Koordinaten von  $\vec{r}$  im neuen Koordinatensystem  $\vec{e}'_i$  sind. Ist  $\vec{r}(t)$  also eine Bahnkurve im Bezugssystem  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, t)$ , dann ist die entsprechende Bahnkurve  $\vec{r}'(t')$  im Bezugssystem

$$(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, t'), \quad t' = t, \quad O' = O, \quad \vec{e}'_i = D^{-1}\vec{e}_i$$

gegeben durch

$$\vec{r}'(t') = D\vec{r}(t).$$

Da  $D$  konstant ist, gilt

$$\ddot{\vec{r}}' = D\ddot{\vec{r}}$$

und da  $D$  invertierbar ist, gilt erneut

$$\ddot{\vec{r}}' = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = \vec{0}.$$

Konstante Drehungen überführen also Inertialsysteme in Inertialsysteme.

Wir fassen die gefundenen möglichen Transformationen zwischen (erweiterten) Inertialsystemen  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, t)$ ,  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, t')$  zusammen. Diese werden *Galileitransformationen* genannt.

Name	Transf. d. Bezugssystems	Transf. d. Bahnkurve
zeitliche Translation	$O' = O, \vec{e}'_i = \vec{e}_i, t' = t + \tau$	$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t + \tau)$
räumliche Translation	$\vec{O}'\vec{O}(t) = \vec{s}, \vec{e}'_i = \vec{e}_i, t' = t$	$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{s}$
spez. Galileitransformation	$\vec{O}'\vec{O}(t) = \vec{w}t, \vec{e}'_i = \vec{e}_i, t' = t$	$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{w}t$
Rotation	$O' = O, \vec{e}'_i = D^{-1}\vec{e}_i, t' = t$	$\vec{r}'(t) = D\vec{r}(t)$

Galileitransformationen überführen also Inertialsysteme in Inertialsysteme. Die vier Arten der Galileitransformationen lassen sich beliebig kombinieren, wir können also gleichzeitig eine zeitliche und räumliche Translation, eine Drehung und eine spezielle Galileitransformation durchführen.

Wir betrachten nun folgende Situation  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, t)$  sei ein Inertialsystem. Nach einer Galileitransformation erhalten wir daraus  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, t')$  und nach einer weiteren  $(O'', \vec{e}''_1, \vec{e}''_2, \vec{e}''_3, t'')$ . Da  $(O'', \vec{e}''_1, \vec{e}''_2, \vec{e}''_3, t'')$  wieder ein Inertialsystem ist, erwarten wir, dass es eine Galileitransformation gibt, die  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, t)$  ohne den Umweg über  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, t')$  direkt in  $(O'', \vec{e}''_1, \vec{e}''_2, \vec{e}''_3, t'')$  überführt. Um das zu untersuchen, schreiben wir eine Galileitransformation als  $T[D, \vec{w}, \vec{s}, \tau]$ . D.h.

$$\vec{r}'(t) = T[D, \vec{w}, \vec{s}, \tau](\vec{r}(t)) = D\vec{r}(t + \tau) + \vec{w}t + \vec{s}$$

Es sei nun  $T[D_1, \vec{w}_1, \vec{s}_1, \tau_1]$  die Transformation, die  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, t)$  in  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, t')$  überführt und  $T[D_2, \vec{w}_2, \vec{s}_2, \tau_2]$  die Transformation, die  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, t')$  in  $(O'', \vec{e}''_1, \vec{e}''_2, \vec{e}''_3, t'')$  überführt. Es gilt also

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= T[D_1, \vec{w}_1, \vec{s}_1, \tau_1](\vec{r}(t)) = D_1\vec{r}(t + \tau_1) + \vec{w}_1t + \vec{s}_1 \\ \vec{r}''(t) &= T[D_2, \vec{w}_2, \vec{s}_2, \tau_2](\vec{r}'(t)) = D_2\vec{r}'(t + \tau_2) + \vec{w}_2t + \vec{s}_2 \\ &= D_2(D_1\vec{r}(t + \tau_1 + \tau_2) + \vec{w}_1(t + \tau_2) + \vec{s}_1) + \vec{w}_2t + \vec{s}_2 \\ &= D_2D_1\vec{r}(t + \tau_1 + \tau_2) + (D_2\vec{w}_1 + \vec{w}_2)t + D_2(\vec{w}_1\tau_2 + \vec{s}_1) + \vec{s}_2 \\ &= T[D_2D_1, D_2\vec{w}_1 + \vec{w}_2, D_2(\vec{w}_1\tau_2 + \vec{s}_1) + \vec{s}_2, \tau_1 + \tau_2](\vec{r}(t)) \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis lässt sich wie folgt ausdrücken

$$T[D_2, \vec{w}_2, \vec{s}_2, \tau_2] \circ T[D_1, \vec{w}_1, \vec{s}_1, \tau_1] = T[D_2D_1, D_2\vec{w}_1 + \vec{w}_2, D_2(\vec{w}_1\tau_2 + \vec{s}_1) + \vec{s}_2, \tau_1 + \tau_2].$$

Das Symbol  $\circ$  bedeutet dabei "Verknüpfung" bzw. "Hintereinanderausführung". Wir finden also: die Verknüpfung von  $T[D_1, \vec{w}_1, \vec{s}_1, \tau_1]$  und  $T[D_2, \vec{w}_2, \vec{s}_2, \tau_2]$  ist erneut eine Galileitransformation  $T[D_3, \vec{w}_3, \vec{s}_3, \tau_3]$  mit

$$D_3 = D_2D_1, \quad \vec{w}_3 = D_2\vec{w}_1 + \vec{w}_2, \quad \vec{s}_3 = D_2(\vec{w}_1\tau_2 + \vec{s}_1) + \vec{s}_2, \quad \tau_3 = \tau_1 + \tau_2.$$

Offenbar können wir eine Galileitransformation rückgängig machen, indem wir wählen

$$D_2 = D_1^{-1}, \quad \vec{w}_2 = -D_1^{-1}\vec{w}_1, \quad \vec{s}_2 = -D_1^{-1}(\vec{s}_1 - \tau_1\vec{w}_1), \quad \tau_2 = -\tau_1.$$

In Formeln gilt

$$\begin{aligned} & T[D_1^{-1}, -D_1^{-1}\vec{w}_1, -D_1^{-1}(\vec{s}_1 - \tau_1\vec{w}_1), -\tau_1] \circ T[D_1, \vec{w}_1, \vec{s}_1, \tau_1] \\ &= T[D_1, \vec{w}_1, \vec{s}_1, \tau_1] \circ T[D_1^{-1}, -D_1^{-1}\vec{w}_1, -D_1^{-1}(\vec{s}_1 - \tau_1\vec{w}_1), -\tau_1] \\ &= T[\mathbb{1}, \vec{0}, \vec{0}, 0] \end{aligned}$$

mit der Einheitsmatrix  $\mathbb{1}$ . Außerdem gilt für eine beliebige Galileitransformation  $T[D, \vec{w}, \vec{s}, \tau]$

$$T[D, \vec{w}, \vec{s}, \tau] \circ T[\mathbb{1}, \vec{0}, \vec{0}, 0] = T[\mathbb{1}, \vec{0}, \vec{0}, 0] \circ T[D, \vec{w}, \vec{s}, \tau] = T[D, \vec{w}, \vec{s}, \tau]$$

Damit haben die Galileitransformationen mathematisch die Struktur einer *Gruppe* – die *Galilei-Gruppe*. Eine Gruppe  $\mathcal{G}$  ist mathematisch eine Menge von Elementen mit einer Verknüpfung  $\circ$ , so dass folgende Axiome erfüllt sind

1. Für beliebige Gruppenelemente  $A, B, C$  gilt das *Assoziativgesetz*

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$$

2. Es existiert ein *neutrales Element*  $e$ , so dass für alle Gruppenelemente  $A$  gilt

$$A \circ e = e \circ A = A.$$

3. Zu jedem Gruppenelement  $A$  existiert ein *inverses Element*  $A^{\circ-1}$  so dass

$$A \circ A^{\circ-1} = A^{\circ-1} \circ A = e.$$

Ein einfaches Beispiel für eine Gruppe sind die reellen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung. Das neutrale Element ist  $e = 0$  und  $A^{\circ-1} = -A$ .

Im Falle der Galileitransformationen ist das neutrale Element

$$e = T[\mathbb{1}, \vec{0}, \vec{0}, 0]$$

und das inverse Element ist

$$(T[D, \vec{w}, \vec{s}, \tau])^{\circ-1} = T[D^{-1}, -D^{-1}\vec{w}, -D^{-1}(\vec{s} - \tau\vec{w}), -\tau].$$

Das Assoziativgesetz lässt sich leicht durch direktes Nachrechnen überprüfen.

Die Galileitransformationen überführen Inertialsysteme in Inertialsysteme. Daher nennt man sie die *Symmetrietransformationen* und die Galileigruppe die *Symmetriegruppe* der klassischen Mechanik. Die Galileitransformationen sind *kontinuierliche* Transformationen, d.h. sie sind durch verschiedenen reelle Zahlen  $\lambda_j, j = 1, 2, \dots$  so bestimmt, dass man für  $\lambda_j$  "groß" eine "große Transformation" hat, man aber die  $\lambda_j$  beliebig klein wählen kann und z.B. für  $\lambda_j = 0$  die Identitätstransformation bekommt. Diese Parameter sind

- ... für die Zeittranslation die Zahl  $\tau$ ,
- ... für die räumlichen Translationen die drei Komponenten von  $\vec{s}$ ,
- ... für die speziellen Galileitransformationen die drei Komponenten von  $\vec{w}$ ,
- ... für die Rotationen die drei Winkel  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  mit denen man jede Rotation eindeutig charakterisieren kann.

Wir werden später verstehen, dass zu jeder kontinuierlichen Symmetrietransformation eines Systems eine Erhaltungsgröße gehört. Diese Tatsache ist von fundamentaler Bedeutung in der (theoretischen) Physik und unterstreicht die wichtige Rolle der Symmetrien physikalischer Systeme. Für ein Mehrteilchensystem lässt sich zeigen (später)

- Aus der Invarianz unter Zeittranslationen folgt die Erhaltung der Gesamtenergie (das haben wir im Grunde schon gezeigt).
- Aus der Invarianz unter räumlichen Translationen folgt die Erhaltung des Gesamtimpulses.
- Aus der Invarianz unter Drehungen folgt die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses (das haben wir im Grunde schon gezeigt).
- Aus der Invarianz unter speziellen Galileitransformationen folgt  $\vec{R}(t) - \frac{\vec{P}}{M}t = \vec{R}(0)$ .

Zusätzlich zu den besprochenen kontinuierlichen Transformation die Inertialsysteme in andere überführen gibt es noch *diskrete Transformationen* die das auch tun. Zu einen können wir räumliche Spiegelungen betrachten

$$\vec{r}'(t) = -\vec{r}(t),$$

zum anderen können wir die Zeitrichtung umkehren

$$t' = -t, \quad \vec{r}'(t) = \vec{r}(-t).$$

Diese zwei Transformationen lassen sich auch gleichzeitig durchführen und es ist nicht schwer zu sehen, dass sie Inertialsysteme in Inertialsysteme überführen. Offenbar sind diese Transformationen nicht kontinuierlich, da man nicht "ein bisschen spiegeln" kann. Aus diesem Grund haben wir diese Transformationen nicht in die Galileigruppe aufgenommen. Mathematisch ist das aber möglich und man erhält eine größere Gruppe.

## 2.9 Bewegung in Nicht-Inertialsystemen

Zum Abschluss der Diskussion der Newton'schen Mechanik betrachten wir Bewegungen in Nicht-Inertialsystemen. In solchen wirken auf Körper zusätzlich zu den "echten" Kräften Scheinkräfte bzw. Trägheitskräfte.

Das einfachste Beispiel für Nicht-Inertialsysteme sind rotierende Bezugssysteme. Es sei also  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, t)$  ein Inertialsystem und  $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, t')$  ein weiteres Bezugssystem mit

$$O' = O, \quad t' = t, \quad \vec{e}'_i = \vec{e}'_i(t) = D^{-1}(t)\vec{e}_i$$

mit einer zeitabhängigen (inversen) Drehmatrix  $D^{-1}(t)$ . Es sei  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  der Ortsvektor einer Punktmasse am Punkt  $P$ . Wie im vorigen Abschnitt diskutiert gilt

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 x'_i \vec{e}'_i.$$

Dabei sind  $x'_i$  die Komponenten des Vektors

$$\vec{r}' = D\vec{r} = \sum_{i=1}^3 x'_i \vec{e}_i$$

bezüglich des Inertialsystems. Im vorigen Abschnitt hatten wir also den Wechsel der Basis  $\vec{e}_i \rightarrow \vec{e}'_i$  so interpretiert, dass sich der Ortsvektor  $\vec{r}$  also Ganzes ändert  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$ , so wie er sich auch ändert wenn man den Ursprung  $O$  verschiebt. Im Folgenden wollen wir den Standpunkt einnehmen, dass der Vektor sich durch den Wechsel des Bezugssystems nicht ändert, sondern dass sich nur seine Komponenten ändern  $x_i \rightarrow x'_i$ . Die beiden Sichtweisen sind im Prinzip äquivalent. Der Wechsel

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

lässt sich auf beiderlei Art interpretieren.

Im Inertialsystem bezeichnen wir  $\dot{\vec{r}}$  und  $\ddot{\vec{r}}$  als Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung des Massenpunktes. Da  $\vec{e}_i$  konstant ist gilt

$$\dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \vec{e}_i, \quad \ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \vec{e}_i.$$

Ein Beobachter der bezüglich des Nicht-Inertialsystems in Ruhe ist – sich also aus sich eines inertialen Beobachters mitdreht – würde aus seiner Sicht Geschwindigkeit und Beschleunigung des Massenpunktes definieren (und messen) als

$$\dot{\vec{r}}' = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i \vec{e}'_i, \quad \ddot{\vec{r}}' = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}'_i \vec{e}'_i.$$

Wir wollen nun eine Beziehung zwischen diesen Größen herstellen. Wir schreiben dafür  $\vec{r}$  bezüglich des Nichtinertialsystems

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 x'_i \vec{e}'_i$$

und leiten ab. Da  $\vec{e}'_i$  selbst zeitabhängig ist, müssen wir auch Zeitableitungen von  $\vec{e}'_i$  berücksichtigen:

$$\dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^3 (\dot{x}'_i \vec{e}'_i + x'_i \dot{\vec{e}}'_i), \quad \ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^3 (\ddot{x}'_i \vec{e}'_i + 2\dot{x}'_i \dot{\vec{e}}'_i + x'_i \ddot{\vec{e}}'_i).$$

Wir wollen nun zeigen, dass Folgendes gilt: es existiert ein Vektor  $\vec{\Omega}$  so dass

$$\dot{\vec{e}}'_i = \vec{\Omega} \times \vec{e}'_i.$$

Wir starten mit der Definition von  $\vec{e}'_i$

$$\vec{e}'_i(t) = D^{-1}(t)\vec{e}_i = D^T(t)\vec{e}_i.$$

Hierbei haben wir verwendet, dass  $D$  eine orthogonale Matrix ist, d.h.  $D^{-1} = D^T$ . Es ist zweckmäßig die Inverse als Transponierte zu schreiben. Denn es gilt

$$\frac{d}{dt}(D^T) = \left(\frac{d}{dt}D\right)^T,$$

die Schreibweise

$$\dot{D}^T$$

ist also unproblematisch, da wir nicht überlegen müssen ob wir erst ableiten und dann transponieren oder umgekehrt. Im Gegensatz dazu gilt

$$\frac{d}{dt}(D^{-1}) \neq \left(\frac{d}{dt}D\right)^{-1},$$

die Schreibweise

$$\dot{D}^{-1}$$

ist also sehr problematisch weil zweideutig interpretierbar.

Nach diesen Vorüberlegungen berechnen wir

$$\dot{\vec{e}}'_i = \dot{D}^T \vec{e}_i = \dot{D}^T D \vec{e}'_i = W \vec{e}'_i, \quad W = \dot{D}^T D.$$

Wir finden also: die Zeitableitung von  $\vec{e}'_i$  lässt sich schreiben als Ergebnis der Anwendung einer Matrix  $W$  auf  $\vec{e}'_i$ . Um die Eigenschaften dieser Matrix zu untersuchen, berechnen wir zunächst:

$$D^T D = D^{-1} D = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(D^T D) = \dot{D}^T D + D^T \dot{D} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{D}^T D = -D^T \dot{D}.$$

Daraus folgt also

$$W = \dot{D}^T D = -D^T \dot{D}.$$

Wir berechnen nun

$$W^T = (\dot{D}^T D)^T = D^T (\dot{D}^T)^T = D^T \dot{D} = -W.$$

$W$  ist also eine *antisymmetrische* Matrix. Schließlich wollen wir zeigen, dass für eine beliebige antisymmetrische Matrix  $A$  und einen beliebigen Vektor  $\vec{v}$  gilt, dass es einen Vektor  $\vec{w}$  gibt, so dass

$$A\vec{v} = \vec{w} \times \vec{v}.$$

Eine allgemeine antisymmetrische Matrix  $A$  ist von der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} A_{12}v_2 + A_{13}v_3 \\ -A_{12}v_1 + A_{23}v_3 \\ -A_{13}v_1 - A_{23}v_2 \end{pmatrix} = \vec{w} \times \vec{v} \quad \text{mit} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -A_{23} \\ A_{13} \\ -A_{12} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\dot{\vec{e}}'_i = W\vec{e}'_i = \vec{\Omega} \times \vec{e}'_i \quad \text{mit} \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} -W_{23} \\ W_{13} \\ -W_{12} \end{pmatrix}$$

und die Behauptung ist gezeigt.

Wie ist  $\vec{\Omega}$  zu interpretieren? Es gilt, dass  $|\vec{\Omega}|$  die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Bezugssystems ist und  $\vec{\Omega}/|\vec{\Omega}|$  die Drehachse. Als Beispiel betrachten wir den Fall

$$D(t) = D(3, \theta(t)) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) & 0 \\ -\sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d.h. ein Bezugssystem, das sich um die  $\vec{e}_3$  Achse dreht. Offenbar gilt dann

$$\vec{e}'_3 = \vec{e}_3 = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{e}}'_3 = \vec{0}.$$

Andererseits gilt

$$\dot{\vec{e}}'_3 = \vec{\Omega} \times \vec{e}'_3 = \vec{0} \quad \text{da} \quad \vec{\Omega} \parallel \vec{e}'_3.$$

Die Interpretation, dass  $\vec{\Omega}$  die Drehachse ist, scheint also in diesem Beispiel sinnvoll zu sein. Um zu zeigen dass  $|\vec{\Omega}|$  als Winkelgeschwindigkeit interpretiert werden kann, berechnen wir

$$\dot{D} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dot{D}^T = \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W = \dot{D}^T D = \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}.$$

Um unser Ziel zu erreichen,  $\dot{r}'$  und  $\ddot{r}'$  mit  $\dot{r}$  und  $\ddot{r}$  in Verbindung zu bringen, benötigen wir noch die zweite Zeitableitung von  $\vec{e}'$ . Aus

$$\dot{\vec{e}}' = \vec{\Omega} \times \vec{e}'$$

folgt

$$\ddot{\vec{e}}' = \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{e}' + \vec{\Omega} \times \dot{\vec{e}}' = \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{e}' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{e}').$$

Insgesamt finden wir also

$$\dot{r}' = \sum_{i=1}^3 (\dot{x}'_i \vec{e}'_i + x'_i \dot{\vec{e}}'_i) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i \vec{e}'_i + \sum_{i=1}^3 x'_i \vec{\Omega} \times \vec{e}'_i = \dot{r} + \vec{\Omega} \times r.$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}' &= \sum_{i=1}^3 (\ddot{x}'_i \vec{e}'_i + 2\dot{x}'_i \dot{\vec{e}}'_i + x'_i \ddot{\vec{e}}'_i) \\ &= \sum_{i=1}^3 (\ddot{x}'_i \vec{e}'_i + 2\dot{x}'_i \vec{\Omega} \times \vec{e}'_i + x'_i (\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{e}'_i + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{e}'_i))) \\ &= \ddot{r}' + 2\vec{\Omega} \times \dot{r}' + \dot{\vec{\Omega}} \times r + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times r). \end{aligned}$$

Es gilt

$$m\ddot{r} = \vec{F},$$

d.h.  $\vec{F}$  ist die Kraft die im Inertialsystem auf den Massenpunkt wirkt. Im rotierenden Bezugssystem gilt allerdings

$$m\ddot{r}' = \vec{F} - 2m\vec{\Omega} \times \dot{r}' - m\dot{\vec{\Omega}} \times r' - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times r'),$$

wobei wir  $\vec{r}' = r$  gesetzt haben da wir  $\vec{r}$  in diesem Fall als einen Vektor betrachten, der unabhängig vom Bezugssystem die gleiche Länge und Richtung hat. Die drei zusätzlichen Beiträge nennt man *Scheinkräfte* oder *Trägheitskräfte*, da sie zusätzlich zu  $\vec{F}$  scheinbar wirken und da sie darauf zurückzuführen sind, dass eine Bewegung in einem Inertialsystem für  $\vec{F} = \vec{0}$  wegen der "Trägheit" dieser Bewegung geradlinig gleichförmig verläuft und eben nicht rotierend.

Wir wollen nun die einzelnen Scheinkräfte allgemein und am Beispiel eines erdfesten Bezugssystems diskutieren. Dafür vernachlässigen wir die Rotation der Erde um die Sonne und betrachten die Bewegung der Erde als geradlinig gleichförmig. Ein Bezugssystem mit Ursprung  $O$  im Erdmittelpunkt und konstanten Koordinatenachsen wäre dann als inertial anzusehen. Bezüglich dieses Bezugssystem rotiert die Erde (gegen den Uhrzeigersinn, also "nach Osten"). Für

einen festen Punkt  $O'$  auf der Erdoberfläche wählen wir  $\vec{e}'_3$  als nach oben (in den Himmel) zeigend.  $\vec{e}'_1$  zeige tangential zur Erdoberfläche nach Osten und  $\vec{e}'_2$  dann tangential zur Erdoberfläche nach Norden. Auch wenn  $O \neq O'$  gilt - wir haben in der Berechnung oben der Einfachheit halber  $O = O'$  angenommen - treten die berechneten Scheinkräfte in der gefundenen Form auf. Es gibt zwar einen Zusatzbeitrag von der Zeitableitung von  $\vec{OO}'$ , diesen wollen wir hier aber außer Acht lassen.

1. Der Beitrag  $-m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'$  entspricht einer Trägheitskraft die auf die Änderung der Drehachse oder Winkelgeschwindigkeit zurückzuführen ist. Im Beispiel der Erde ist dieser Term vernachlässigbar.
2. Der Beitrag  $-m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$  ist die *Zentrifugalkraft*. Mit der BAC-CAB Regel finden wir

$$-m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = m\vec{\Omega}^2 \vec{r}' - m(\vec{\Omega} \cdot \vec{r}')\vec{\Omega}.$$

Wenn die Bewegung in einer Ebene senkrecht zu  $\vec{\Omega}$  stattfindet, dann gilt

$$-m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = m\vec{\Omega}^2 \vec{r}'.$$

Allgemein kann man  $\vec{r}'$  zerlegen in einen Beitrag parallel zu  $\vec{\Omega}$  und einen Beitrag senkrecht zu  $\vec{\Omega}$

$$\vec{r}' = \vec{r}'_{\parallel} + \vec{r}'_{\perp}.$$

Dann gilt

$$-m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\perp}) = m\vec{\Omega}^2 \vec{r}'_{\perp}.$$

Wenn ein Massenpunkt bezüglich der Erdoberfläche ruht, dann wirkt auf ihn (scheinbar) die Kraft

$$m\vec{g} + m\vec{\Omega}^2 \vec{r}'_{\perp}.$$

D.h. dass Körper je nach Breitengrad durch die Drehung der Erde leichter sind. Am stärksten ist dieser Effekt am Äquator, wo die Erdanziehungskraft um ca. 0.3% herabgesetzt wird (böse Zungen sprechen von der Äquatordüät). Auf anderen Breitengraden ist der Effekt geringer, allerdings ist dort auch die Richtung der Schwerkraft leicht abweichend und zeigt nicht genau zum Erdmittelpunkt.

3. Der Beitrag  $-2m\dot{\vec{r}}' \times \vec{\Omega} = 2m\dot{\vec{r}}' \times \vec{\Omega}$  ist die *Corioliskraft* und wirkt nur auf Punktmassen die sich relativ zur Erdoberfläche bewegen. In den oben gewählten Koordinatensystem ist jede Bewegung auf der Erdoberfläche eine Bewegung in der  $\vec{e}'_1$ - $\vec{e}'_2$ -Ebene. Es sei also

$$\dot{\vec{r}}' = v_1 \vec{e}'_1 + v_2 \vec{e}'_2.$$

Außerdem gilt

$$\vec{\Omega} = \Omega_2 \vec{e}'_2 + \Omega_3 \vec{e}'_3$$

da  $\vec{\Omega}$  keinen Beitrag in Richtung von  $\vec{e}'_1$ , d.h. tangential zu den Breitengraden, hat. Es folgt

$$2m\dot{\vec{r}}' \times \vec{\Omega} = 2m \begin{pmatrix} v_2\Omega_3 \\ -v_1\Omega_3 \\ v_1\Omega_2 \end{pmatrix} = 2m (v_1\Omega_2\vec{e}'_3 + \Omega_3(v_2\vec{e}'_1 - v_1\vec{e}'_2)).$$

$\Omega_2$  führt also zu einer verminderten (Bewegung nach Osten) oder erhöhten (Bewegung nach Westen) Erdanziehungskraft.  $\Omega_3$  lenkt dagegen die Bewegung auf der Oberfläche ab, und zwar aus sich der Bewegungsrichtung nach rechts auf der Nordhalbkugel und nach links auf der Südhalbkugel. Wegen

$$|\vec{\Omega}| = \frac{2\pi}{1\text{Tag}}$$

gilt

$$|2\dot{\vec{r}}' \times \vec{\Omega}| \approx 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 10^{-4}g \quad \text{für} \quad |\dot{\vec{r}}'| \approx 7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 25 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Für kurze, langsame Bewegungen spielt die Corioliskraft also keine Rolle. Für lange Zeitskalen aber schon, darum ist die Corioliskraft relevant für das Wetter und die Meeresströmungen. Und darum ist sie irrelevant für die Fragestellung, in welche Richtung das Wasser sich dreht wenn es aus der Badewanne fließt; das ist auf der Nordhalbkugel nämlich oft der Uhrzeigersinn ;-).

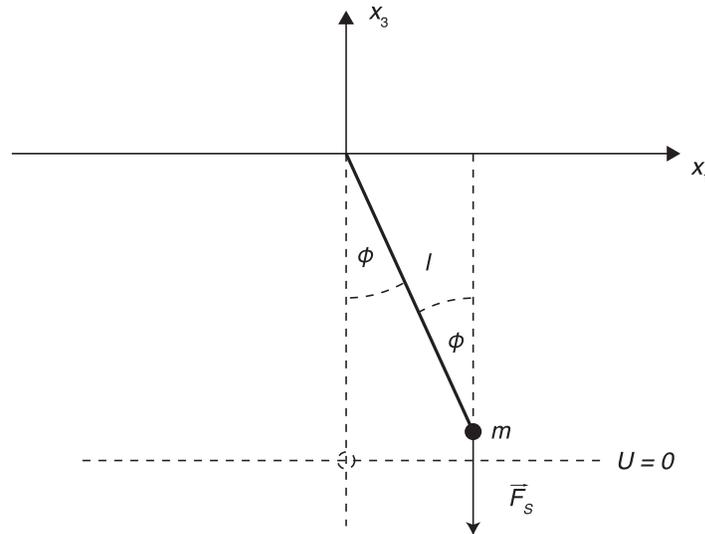
### 3 Der Lagrange'sche Zugang zur klassischen Mechanik

Im bisher diskutierten Newton'schen Zugang zur klassischen Mechanik sind wir in der Regel wie folgt vorgegangen: wir haben die Bewegung eines oder mehrerer Massenpunkte unter dem Einfluss von Kräften auf Grundlage der Newton'schen Gesetze bestimmt. Die genaue Form der Kräfte war dabei bekannt und/oder konnte ebenfalls aus den Newton'schen Gesetzen bestimmt werden.

In vielen wichtigen Anwendungen ist diese Vorgehensweise nicht ausreichend. Oft ist man mit der folgenden Situation konfrontiert: Massenpunkte bewegen sich unter dem Einfluss von Kräften, die man nicht explizit kennt. Man kennt diese Kräfte allerdings implizit, indem man weiß, was sie bewirken. In Beispielen kann man diese implizite Kenntnis verwenden um mit den Newton'schen Methoden die Bewegungsgleichungen aufzustellen und diese zu lösen. Das ist allerdings oft mühsam und man muss von Fall zu Fall neu denken. Offenbar ist zur effizienten Analyse solcher Fälle ein Zugang zur klassischen Mechanik nötig, der über die Newton'schen Gesetze hinausgeht: der *Lagrange'sche Zugang*. Dieser Zugang soll im Folgenden motiviert und erläutert werden. Dazu betrachten wir das Problem der "unbekannten Kräfte" an ein paar Beispielen, die wir zunächst mit den uns bekannten Methoden berechnen.

### 3.1 Generalisierte Koordinaten, Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

**Beispiel 1: Pendel** Wir betrachten erneut das Pendel aus Abschnitt 2.5.2, diesmal aus einem etwas anderen Blickwinkel. Ein Massenpunkt ist an einer starren und idealisiert masselosen Stan-



ge der Länge  $l$  im Ursprung aufgehängt und bewegt sich unter dem Einfluss des Schwerfeldes der Erde. Es gilt – wie immer –

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}.$$

Was ist  $\vec{F}$ ? Offenbar ist die Schwerkraft

$$\vec{F}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

ein Beitrag von  $\vec{F}$ . Allerdings kann nicht  $\vec{F} = \vec{F}_s$  gelten. Wäre das der Fall, würde der Massenpunkt senkrecht herunterfallen. Er wird allerdings durch die Befestigung an der Stange daran gehindert. Offenbar gilt die *Zwangsbedingung*

$$r = |\vec{r}| = l.$$

Zu dieser Zwangsbedingung muss es eine *Zwangskraft*  $\vec{Z}$  geben, so dass gilt: jede Lösung von

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \vec{F}_s + \vec{Z}$$

erfüllt automatisch die Zwangsbedingung  $r = l$ . Wie genau ist  $\vec{Z}$  beschaffen? Offenbar ist  $\vec{Z}$  parallel zu  $\vec{r}$ , zeigt also entlang der Verbindungslinie Massenpunkt-Aufhängepunkt. Das Vorzeichen von  $\vec{Z}$  ist dabei weniger offensichtlich. Man kann sich die starre Stange als Kette von Massenpunkten vorstellen, die jeweils durch "harte Federn" verbunden sind; der "letzte Massenpunkt" ist ebenfalls durch eine harte Feder mit dem hier betrachteten verbunden. Für die Kräfte zwischen diesen Massenpunkten und dem hier betrachteten gilt jeweils das dritte Newton'sche Gesetz. Die Kraft  $\vec{Z}$  auf den hier betrachteten Massenpunkt entspricht also einer umgekehrten Kraft auf die Stange. Wenn  $\vec{Z}$  vom Ursprung zum Massenpunkt zeigt, wirkt also auf die Stange eine *Zugspannung*, im anderen Fall eine *Stauchspannung*. Das zeigt, dass Zwangskräfte durchaus eine physikalische Bedeutung haben. Das Gebiet der *Statik* befasst sich im Grunde nur mit solchen Zwangskräften. Eine Brücke lässt sich z.B. als eine Ansammlung von Massenpunkten auffassen. Es existieren so viele Zwangskräfte, dass sich die Brücke (im Idealfall) nicht bewegt. Diese Zwangskräfte entsprechen Kräften, die auf die Brückenelemente wirken. Die Brücke sollte natürlich so konstruiert sein, dass die Bauelemente diesen Kräften standhalten können.

Wir betrachten weiterhin das Problem der exakten Berechnung von  $\vec{Z}$  und der Lösung der Bewegungsgleichungen. Die Zwangsbedingung  $r = l$  hat zur Folge, dass der Massenpunkt sich nur auf der Oberfläche einer Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius  $l$  bewegen kann. Wir wollen hier den Fall betrachten, dass sich der Massenpunkt nur in der  $x_1$ - $x_3$ -Ebene bewegen kann. Wie im Abschnitt 2.5.2 besprochen lässt sich das erreichen, indem wir Anfangsbedingungen so wählen, dass  $x_2(0) = 0$ ,  $\dot{x}_2(0) = 0$ . Dann folgt aus der Zwangsbedingung, dass sich der Massenpunkt nur auf einem Kreis um den Ursprung mit Radius  $l$  bewegen kann. Die Zwangsbedingung lässt sich also etwas abstrakter wie folgt interpretieren: zunächst hat das System ohne Zwangsbedingungen zwei Freiheitsgrade – der Massenpunkt kann sich in der  $x_1$ - $x_3$ -Ebene frei bewegen. Durch die Gleichung  $r = |\vec{r}| = l$  – eine einzelne Gleichung – werden die Freiheitsgrade des Systems gerade um eins reduziert, das System hat also nur noch einen Freiheitsgrad – es kann sich frei auf dem angesprochenen Kreis bewegen. Allgemein reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade gerade um die Anzahl der Zwangsbedingungen. Weiteres Beispiel dazu: betrachte einen Massenpunkt in drei Raumdimensionen. Dieser hat zunächst drei Freiheitsgrade. Wir stellen uns nun vor, dass dieser Massenpunkt eine Perle ist, die sich entlang eines (unendlich langen) Fadens bewegen kann. Der Faden sei entlang der  $x_3$ -Achse aufgespannt. Die Zwangsbedingungen sind also  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 0$ . Diese zwei Zwangsbedingungen reduzieren die drei Freiheitsgrade des Systems um zwei. Es hat also nun noch einen Freiheitsgrad – es kann sich frei entlang der  $x_3$ -Achse bewegen.

Hat man ohne Zwangsbedingungen  $f$  Freiheitsgrade und sind  $k$  Zwangsbedingungen vorhanden, dann hat das System mit den Zwangsbedingungen  $f - k$  Freiheitsgrade. Das System kann sich also auf einem  $f - k$ -dimensionalen "Gebilde" bewegen – in unserem Beispiel ein Kreis (genauer: der Rand eines Kreises). Es ist in der Regel zweckmässig, anstatt der  $f$  kartesischen Koordinaten  $f$  neue Koordinaten zu wählen, die derart sind, dass  $f - k$  davon das  $f - k$ -dimensionalen "Gebilde" beschreiben, auf dem die Bewegung stattfindet und die übrigen  $k$  die Richtungen beschreiben, in denen die Bewegung wegen der Zwangsbedingungen nicht stattfinden "darf". In unserem Beispiel wählen wir anstatt der zwei kartesischen Koordinaten  $x_1$

und  $x_3$  ebene Polarkoordinaten  $r, \phi$  mit

$$x_1 = r \sin(\phi), \quad x_3 = -r \cos(\phi).$$

$r$  ist dabei gerade die Koordinate, die wegen  $r = l$  durch die Zwangsbedingung festgelegt ist, und  $\phi$  die Koordinate, die den Kreis beschreibt, auf dem Bewegung noch möglich ist. Die Polarkoordinaten  $r, \phi$  sind ein Beispiel für *generalisierte (verallgemeinerte) Koordinaten*. "Verallgemeinert" heißt hierbei "nicht notwendigerweise kartesisch".

Die Tatsache, dass  $\vec{Z}$  parallel zu  $\vec{r}$  ist, ist gleichbedeutend damit, dass  $\vec{Z}$  senkrecht auf der Tangente am Kreis am Ort des Massenpunktes ist. Allgemein gilt, dass – für zeitunabhängige Zwangsbedingungen –  $\vec{Z}$  senkrecht auf dem  $f - k$ -dimensionalen "Gebilde" steht, auf dem die eingeschränkte Bewegung stattfindet.

Die Tatsache, dass  $\vec{Z}$  parallel zu  $\vec{r}$  ist können wir ausdrücken durch

$$\vec{Z}(t) = h(t)\vec{r}(t)$$

mit einer unbekanntem Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Insgesamt finden wir also

$$m\ddot{\vec{r}} = ml \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \sin(\phi) \\ 0 \\ -\cos(\phi) \end{pmatrix} = ml \begin{pmatrix} \ddot{\phi} \cos(\phi) - \dot{\phi}^2 \sin(\phi) \\ 0 \\ \ddot{\phi} \sin(\phi) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi) \end{pmatrix} = \vec{F}_s + \vec{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} + hl \begin{pmatrix} \sin(\phi) \\ 0 \\ -\cos(\phi) \end{pmatrix},$$

zusammengefasst,

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} \cos(\phi) - \dot{\phi}^2 \sin(\phi) &= \frac{h}{m} \sin(\phi), \\ \ddot{\phi} \sin(\phi) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi) &= -\frac{g}{l} - \frac{h}{m} \cos(\phi). \end{aligned}$$

Wir können nun die Zwangskraft eliminieren, indem wir die erste Gleichung mit  $\cos(\phi)$  und die zweite mit  $\sin(\phi)$  multiplizieren.

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} \cos^2(\phi) - \dot{\phi}^2 \sin(\phi) \cos(\phi) &= \frac{h}{m} \sin(\phi) \cos(\phi), \\ \ddot{\phi} \sin^2(\phi) + \dot{\phi}^2 \sin(\phi) \cos(\phi) &= -\frac{mg}{l} \sin(\phi) - \frac{h}{m} \sin(\phi) \cos(\phi). \end{aligned}$$

Wenn wir die Gleichungen addieren, finden wir

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin(\phi).$$

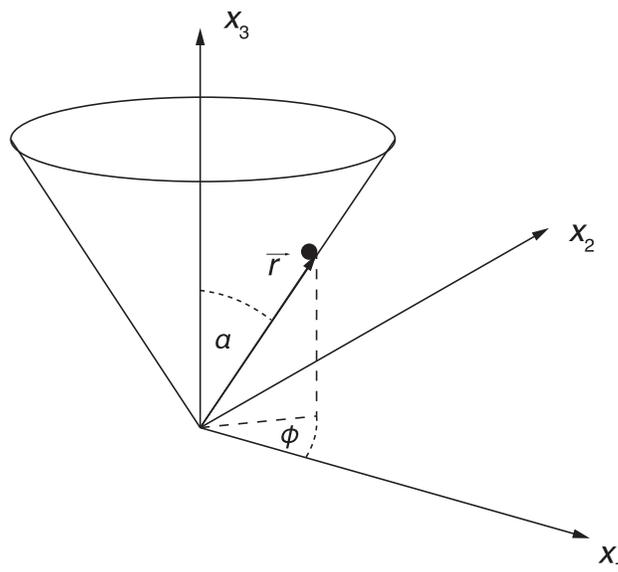
Diese Gleichung können wir nun lösen. Die Lösung dieser Gleichung haben wir bereits in Abschnitt 2.5.2 diskutiert. Dabei haben wir die Lösung unter Ausnutzung der Energieerhaltung

abgekürzt, darum war es gar nicht erst nötig die Gleichung für  $\ddot{\phi}$  zu betrachten. Die Zwangskräfte können wir berechnen, indem wir die Gleichungen subtrahieren und die Gleichung für  $\ddot{\phi}$  einsetzen

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)) - 2\dot{\phi}^2 \sin(\phi) \cos(\phi) &= 2\frac{h}{m} \sin(\phi) \cos(\phi) + \frac{g}{l} \sin(\phi), \\ \Leftrightarrow -\frac{g}{l}(2\cos^2(\phi) - 1) - 2\dot{\phi}^2 \cos(\phi) &= 2\frac{h}{m} \cos(\phi) + \frac{g}{l}, \\ \Leftrightarrow h &= -\frac{mg}{l} \cos(\phi) - m\dot{\phi}^2. \end{aligned}$$

Der Beitrag  $-m\dot{\phi}^2$  im Betrag von  $\vec{Z}$  entspricht dabei der *Zentripetalkraft* für die Drehung um die  $x_2$ -Achse. In Abwesenheit der Erdschwerkraft ist das gerade die vollständige Zwangskraft. Für  $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ , d.h. in der unteren Halbebene, gilt  $\cos(\phi) \geq 0$ , d.h.  $h < 0$ .  $\vec{Z}$  zeigt zum Massenpunkt und auf die Stange wirkt eine Zugspannung. In der oberen Halbebene hängt das Vorzeichen von  $h$  von der Energie, d.h.  $\dot{\phi}$  ab. Wenn die Energie gerade reicht um nach oben durchzuschwingen, dann ist für  $\phi = -\pi = \pi$   $\cos(\phi) = -1$  und  $\dot{\phi} = 0$ , also  $h > 0$ ,  $\vec{Z}$  zeigt zum Ursprung und auf die Stange wirkt eine Stauchspannung. Für genügend große Energien gilt immer  $h < 0$ , wobei  $h$  aber in der oberen Halbebene betragsmäßig immer noch kleiner als in der unteren Halbebene ist.

**Beispiel 2: Bewegung im Kegel** Als weiteres Beispiel betrachten wir die Bewegung eines Massenpunktes in einem umgedrehten Kegel mit Öffnungswinkel  $2\alpha$  unter Einfluss der Erdschwerkraft. Man kann sich dieses System vorstellen als eine Kugel die in dem Kegel reibungsfrei rollt, wobei die kinetische Energie der Rollbewegung selbst vernachlässigt wird. Offenbar sind



Kugelkoordinaten  $(r, \phi, \theta)$  gute verallgemeinerte Koordinaten für dieses Problem. Wir setzen also

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Zwangsbedingung lautet in diesen Koordinaten

$$\theta = \alpha.$$

Die dreidimensionale Bewegung wird also durch die Zwangsbedingung auf eine zweidimensionale Bewegung reduziert. Das zweidimensionale Gebilde auf dem die Bewegung stattfindet ist gerade die Kegeloberfläche. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_s + \vec{Z}, \quad \vec{F}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}.$$

Wir erwarten, dass die Zwangskraft senkrecht auf dem Kegel steht. Die Tangentialebene am Kegel am Ort des Massenpunktes wird aufgespannt durch die Einheitsvektoren in  $r$ - und  $\phi$ -Richtung. Allgemein gilt

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{d}{dr}\vec{r}}{\left|\frac{d}{dr}\vec{r}\right|}, \quad \vec{e}_\phi = \frac{\frac{d}{d\phi}\vec{r}}{\left|\frac{d}{d\phi}\vec{r}\right|}.$$

Es ist

$$\frac{d}{dr}\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor hat bereits Länge 1, d.h.

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$\frac{d}{d\phi}\vec{r} = r \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\phi) \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\frac{d}{d\phi}\vec{r}\right| = r \sin(\theta).$$

Also

$$\vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung, dass  $\vec{Z}$  senkrecht auf den Kegel steht lautet also

$$\vec{Z} \cdot \vec{e}_r = 0, \quad \vec{Z} \cdot \vec{e}_\phi = 0.$$

Damit bekommen wir (für  $\theta = \alpha$ )

$$\begin{aligned} Z_1 \cos(\phi) \sin(\alpha) + Z_2 \sin(\phi) \sin(\alpha) + Z_3 \cos(\alpha) &= 0 \\ -Z_1 \sin(\phi) + Z_2 \cos(\phi) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad Z_2 = \tan(\phi) Z_1. \end{aligned}$$

(Für die Berechnung dieser Bedingungen war die Normierung der Tangentialvektoren natürlich nicht nötig.) Wenn wir die zweite Bedingung in die erste einsetzen finden wir

$$\begin{aligned} Z_1 \cos(\phi) \sin(\alpha) + Z_1 \tan(\phi) \sin(\phi) \sin(\alpha) + Z_3 \cos(\alpha) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad Z_3 &= -\tan(\alpha) \left( \cos(\phi) + \frac{\sin^2(\phi)}{\cos(\phi)} \right) Z_1 = -\frac{\tan(\alpha)}{\cos(\phi)} Z_1. \end{aligned}$$

Wie bei dem Beispiel des Pendels haben wir durch geometrische Überlegungen die Zwangskraft bis auf eine unbekannte skalare Größe fixiert. Diese Größe entspricht gerade der Stärke (inkl. Vorzeichen) der Kraft, da wir deren Richtung ja bereits kennen. Die Bewegungsgleichungen lauten damit

$$m\ddot{\vec{r}} = m \begin{pmatrix} \left( \ddot{r} \cos(\phi) - 2\dot{r}\dot{\phi} \sin(\phi) - r\ddot{\phi} \sin(\phi) - r\dot{\phi}^2 \cos(\phi) \right) \sin(\alpha) \\ \left( \ddot{r} \sin(\phi) + 2\dot{r}\dot{\phi} \cos(\phi) + r\ddot{\phi} \cos(\phi) - r\dot{\phi}^2 \sin(\phi) \right) \sin(\alpha) \\ \ddot{r} \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \tan(\phi) Z_1 \\ -\frac{\tan(\alpha)}{\cos(\phi)} Z_1 - mg \end{pmatrix}.$$

Wir können nun wieder die Zwangskraft aus den Gleichungen eliminieren. Als erstes multiplizieren wir die erste Gleichung mit  $\sin(\phi)$  und die zweite mit  $\cos(\phi)$  und subtrahieren die erste von der zweiten. So finden wir (nach Division durch  $\sin(\alpha)$ ) die folgende Gleichung für  $\ddot{\phi}$

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0.$$

Um eine Gleichung für  $\ddot{r}$  zu erhalten, multiplizieren wir die erste Gleichung mit  $\tan(\alpha)$  und die dritte mit  $\cos(\phi)$  und addieren. Dabei nutzen wir die bereits gefundene Gleichung für  $\ddot{\phi}$  aus. Wir finden

$$\begin{aligned} \ddot{r}(\tan(\alpha) \sin(\alpha) + \cos(\alpha)) - r\dot{\phi}^2 \sin(\alpha) \tan(\alpha) + g &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2(\alpha) + g \cos(\alpha) &= 0. \end{aligned}$$

Die Zwangskraft  $Z_1$  lässt sich nach Lösung der Bewegungsgleichungen für  $r$  und  $\phi$  für jede Lösung durch z.B. die erste obige Gleichung berechnen.

Die oben gefundenen Bewegungsgleichungen sind im Allgemeinen nicht exakt analytisch lösbar. Zwei einfache Spezialfälle können wir allerdings explizit diskutieren. Der eine Spezialfall ist das "gerade in den Kegel hineinfallen": Es gilt  $\phi = \phi_0 = \text{konst.}$  und damit

$$\ddot{r} = -g \cos(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad r(t) = -\frac{g \cos(\alpha)}{2} t^2 + \dot{r}(0)t + r(0).$$

Der andere Spezialfall ist eine Drehung mit konstantem  $\dot{\phi} = \omega$  und  $r = r_0$ . Es gilt

$$-r_0 \omega^2 \sin^2(\alpha) + g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{r_0 \sin^2(\alpha)}}.$$

d.h. je nach Höhe im Kegel und Kegelöffnungswinkel ist eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit nötig um die Höhe zu halten. Für dieses  $\omega$  sind Zentrifugalkraft und Schwerkraft gerade im Gleichgewicht.

**Zusammenfassung** Wir fassen die in den beiden Beispielen diskutierten Konzepte zusammen.

- Ein System habe ohne Zwangsbedingungen  $f$  Freiheitsgrade, z.B.  $f = 3N$  für  $N$  Partikel in drei Raumdimensionen (für ausgedehnte starre Körper kommen, wie wir später diskutieren werden, noch jeweils drei Rotationsfreiheitsgrade pro Körper dazu). Sind  $k$  Zwangsbedingungen vorhanden, dann hat das System effektiv nur noch  $f - k$  Freiheitsgrade.
- Die  $f - k$  Freiheitsgrade entsprechen einer Bewegung auf einem  $f - k$ -dimensionalen Gebilde (z.B. Kreisoberfläche, Kugeloberfläche, Kegeloberfläche, Linie, ...).
- Es ist günstig anstatt  $f$  kartesischen Koordinaten  $f$  verallgemeinerte Koordinaten (z.B. Polarkoordinaten, Kugelkoordinaten, ...) zu wählen, die dem Problem angepasst sind. Im Idealfall beschreiben  $f - k$  verallgemeinerte Koordinaten die erlaubte Bewegung und parametrisieren damit das  $f - k$ -dimensionale Gebilde, die anderen  $k$  verallgemeinerten Koordinaten sind durch die Zwangsbedingungen festgelegt.
- Die Zwangsbedingungen sind in den Newton'schen Bewegungsgleichungen durch Zwangskräfte realisiert. Diese Kräfte sorgen dafür, dass die mögliche Bewegung zu allen Zeiten den Zwangsbedingungen entspricht.
- Die explizite Form der Zwangskräfte kann nicht a priori aus den Newton'schen Gesetzen abgeleitet werden. Sie können aber durch geometrische Überlegungen zum Teil festgelegt werden: oft stehen sie senkrecht auf dem  $f - k$ -dimensionalen Gebilde in dem sich die Bewegung abspielt. Durch diese geometrische Überlegung wird zwar die Richtung, aber nicht die Stärke dieser Kräfte festgelegt. Konkreter: im Prinzip haben die Zwangskräfte  $f$  unbekannte Komponenten - entsprechend der  $f$  Beschleunigungskomponenten,

eine für jeden Freiheitsgrad. Die Bedingung dass die Zwangskräfte senkrecht auf dem  $f - k$ -dimensionalen Gebilde stehen legt  $f - k$  dieser  $f$  Komponenten fest,  $k$  bleiben also unbestimmt. Insgesamt sind die  $f$  Komponenten der Newton'schen Bewegungsgleichungen also ausreichend um die  $f$  vorhandenen unbekanntes Größen festzulegen: die  $f - k$  Freiheitsgrade der eingeschränkten Bewegung und die  $k$  nach den geometrischen Überlegungen noch unbekanntes Komponenten der Zwangskräfte.

- Die Newton'schen Bewegungsgleichungen mit Zwangskräften können wie folgt gelöst werden.
  1. Wähle geeignete verallgemeinerte Koordinaten.
  2. Drücke die Bewegungsgleichungen in diesen Koordinaten aus, benutze dabei die Zwangsbedingungen.
  3. Berechne Beziehungen zwischen den Komponenten der Zwangskräfte aus der Bedingung, dass diese senkrecht auf dem  $f - k$ -dimensionalen Gebilde stehen.
  4. Eliminiere die Zwangskräfte aus den Bewegungsgleichungen durch geeignete Linearkombinationen dieser Gleichungen.
  5. Löse die sich so ergebenden  $f - k$  Bewegungsgleichungen in denen die Zwangskräfte nicht mehr auftauchen.

Wenn wir die verallgemeinerten Koordinaten mit

$$q_i, \quad i = 1 \dots, f$$

bezeichnen, dann sind die bisher diskutierten Zwangsbedingungen von der Form

$$F_\beta(q_1, \dots, q_f, t) = 0, \quad \beta = 1, \dots, k.$$

D.h. wir verlangen, dass bestimmte Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten verschwinden, z.B.

$$r - l = 0 \quad (\text{Pendel}), \quad \theta - \alpha = 0 \quad (\text{Kegel}).$$

Diese Bedingungen nennt man *holonome Zwangsbedingungen*. Nichtholonome Zwangsbedingungen können auch Ableitungen der Koordinaten nach der Zeit enthalten oder können auch Ungleichungen sein. In der Vorlesung werden wir uns ausschließlich auf holonome Zwangsbedingungen beschränken.

Holonome Zwangsbedingungen dürfen explizit von der Zeit abhängen, z.B. könnte beim Pendel die Länge  $l$  zeitlich variabel sein. Zeitabhängige holonome Zwangsbedingungen nennt man *rheonom* ("fließend"), zeitunabhängige *skleronom* ("starr").

### 3.2 Virtuelle Verrückungen und das d'Alembert'sche Prinzip

Das in vorigen Abschnitt beschriebene Schema zur Behandlung von Systemen mit Zwangsbedingungen kann bei komplexeren Systemen schnell mühselig werden - und selbst für die hier

diskutieren vergleichsweise einfachen Beispiele ist es nicht sehr effizient. Daher ist es nötig, für solche Systeme ein verbesserten und effizienteren Formalismus zu entwickeln. Um das zu erreichen, wollen wir als erstes die geometrischen Einschränkungen an die Zwangskräfte etwas verallgemeinern und abstrakter formulieren.

Dazu führen wir den Begriff der *virtuellen Verrückungen* ein. Wir betrachten zunächst eine einzelne Punktmasse mit Ortsvektor  $\vec{r}$ . Eine virtuelle Verrückung  $\delta\vec{r}$  bezeichnet eine infinitesimale Änderung von  $\vec{r}$  die mit den Zwangsbedingungen verträglich ist. D.h. wenn  $\vec{r}$  die Zwangsbedingungen erfüllt, dann gilt das auch für  $\vec{r} + \delta\vec{r}$ . Mathematisch bedeutet das nichts anderes als das  $\delta\vec{r}$  ein Vektor ist, der am Ort  $\vec{r}$  tangential am  $f - k$ -dimensionalen Gebilde liegt, auf dem die eingeschränkte Bewegung abläuft. In den Beispielen des Pendels und der Bewegung im Kegel wäre  $\delta\vec{r}$  also ein Tangentialvektor am Kreis bzw. Kegel.

Was hat es mit dem Begriff "virtuell" auf sich? Die Idee ist, dass die Änderung  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \delta\vec{r}$  *instantan* vonstatten geht. Im Gegensatz dazu stehen *reale Verrückungen*  $d\vec{r}$ , die in einem infinitesimalen aber endlichen Zeitschritt  $dt$  ablaufen, so dass

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

gerade die Geschwindigkeit ist. In den von uns betrachteten Beispielen gilt, dass  $\dot{\vec{r}}$  und damit auch  $d\vec{r}$  selbst auch ein Tangentialvektor am  $f - k$ -dimensionalen Gebilde ist. Das liegt daran, dass wir es in diesen Beispielen mit zeitunabhängigen Zwangsbedingungen zu tun haben. Der Formalismus, den wir hier entwickeln wollen, soll aber auch für zeitabhängige Zwangsbedingungen gültig sein. Für solche Zwangsbedingungen sind reale Verrückungen im Allgemeinen *nicht* tangential. Wenn wir z.B. ein Pendel mit zeitabhängiger Länge  $l(t)$  betrachten. Dann gilt

$$r(t) = |\vec{r}(t)| = l(t).$$

In Polarkoordinaten  $(r, \phi)$  lässt sich eine reale Verrückung  $d\vec{r}$  aufteilen in eine Änderung in  $\phi$ -Richtung (bzw.  $\vec{e}_\phi$ -Richtung) und eine Änderung in  $r$ -Richtung (bzw.  $\vec{e}_r$ -Richtung):

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{d\phi} d\phi + \frac{d\vec{r}}{dr} dr = r\vec{e}_\phi d\phi + \vec{e}_r dr$$

Wegen der Zwangsbedingung gilt

$$dr = dl = \frac{dl}{dt} dt = \dot{l} dt.$$

Wenn  $\dot{l} \neq 0$  ist, dann ist also  $d\vec{r}$  *nicht* parallel zu  $\vec{e}_\phi$ , dem Basistangentialwinkel am Kreis. Im Gegensatz dazu ist  $\delta\vec{r}$  nach Definition *immer* parallel zu  $\vec{e}_\phi$ . Die virtuelle Verrückung erfolgt also immer entlang eines Kreises mit dem "jeweils aktuellen" Radius  $l(t)$ .

Wir betrachten nun  $N$  Teilchen mit Ortsvektoren  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ . Alle  $N$  Teilchen sollen (holonomen) Zwangsbedingungen ausgesetzt sein. Diese Zwangsbedingungen können unabhängig sein – z.B. zwei Pendel die unabhängig voneinander schwingen – aber dürfen auch voneinander abhängen – z.B. zwei Pendel die mit einer starren Querstange verbunden sind und deswegen immer

im Gleichtakt schwingen. Auf die  $N$  Teilchen wirken also  $N$  Zwangskräfte  $\vec{Z}_1, \dots, \vec{Z}_N$ . Virtuelle Verrückungen  $\delta\vec{r}_i$  können für jedes Teilchen betrachtet werden. Wir postulieren nun ...

... das *d'Alembert'sche Prinzip*: Die Zwangskräfte erfüllen die Bedingung

$$\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0.$$

Man spricht davon, dass die Zwangskräfte keine *virtuelle Arbeit* am System verrichten.

Das d'Alembert'sche Prinzip kann *nicht* aus den drei Newton'schen Gesetzen abgeleitet werden. Es muss also als zusätzliches Gesetz aufgefasst werden. Das d'Alembert'sche Prinzip ist insbesondere erfüllt, wenn *jede* einzelne der  $N$  Zwangskräfte senkrecht auf das  $f - k$ -dimensionale Bewegungs-Gebilde steht, d.h.

$$\vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, N$$

- z.B. bei  $N$  unabhängigen Pendel. Das d'Alembert'sche Prinzip ist also eine Verallgemeinerung der Bedingung, dass jede Zwangskraft von dieser Art ist. Es wird nicht verlangt, dass jede einzelne der  $N$  Zwangskräfte keine virtuelle Arbeit verrichtet, sondern es wird nur verlangt, dass die virtuelle Arbeit in der Summe verschwindet. Es gibt durchaus Beispiele bei denen die einzelnen virtuellen Arbeiten nicht verschwinden, die Summe aber sehr wohl.

Im Fall von zeitunabhängigen Zwangskräften impliziert das d'Alembert-Prinzip auch das Verschwinden der realen von den Zwangskräften verrichteten Arbeit. Es gilt also

$$\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot d\vec{r}_i = 0$$

und damit

$$\sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \vec{Z}_i(t') \cdot \dot{\vec{r}}_i(t') dt' = \sum_{i=1}^N \int_{C(\vec{r}_i(t_1), \vec{r}_i(t_2))} \vec{Z}_i(t') \cdot d\vec{r}'_i = 0.$$

Wenn für die "echten" Kräfte  $\vec{F}_i$  in den Newton'schen Bewegungsgleichungen  $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i$  gilt, dass  $\vec{F}_i$  zeitunabhängige konservative Kraftfelder sind, dann ist auch in Anwesenheit der Zwangskräfte die Gesamtenergie der  $N$  Teilchen eine Erhaltungsgröße.

Anders ist das, falls man zeitabhängige Zwangsbedingungen betrachtet. Dann verschwindet zwar die gesamte von den Zwangskräften geleistete virtuelle Arbeit, nicht aber die reale. Es gilt also im Allgemeinen

$$\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot d\vec{r}_i \neq 0,$$

und daraus folgt, dass die Gesamtenergie keine Erhaltungsgröße ist. Die Tatsache, dass die virtuelle Arbeit verschwindet, lässt sich so interpretieren, dass die Zwangskräfte die von außen am System geleistete Arbeit unverändert "weitergeben".

Was lässt sich nun aus dem d'Alembert'schen Prinzip ableiten? Wir wissen

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i \quad \Leftrightarrow \quad \vec{Z}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \quad \text{für alle } i,$$

und  $\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$

Daraus folgt sofort

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Diese Gleichung hat den Vorteil, dass die Zwangskräfte in ihr nicht mehr auftauchen. Trotzdem scheint auf den ersten Blick unzureichend zu sein um die Bewegung des Systems zu bestimmen – wir haben  $f - k$  Freiheitsgrade aber nur eine skalare Gleichung! Es wäre verlockend, jeden einzelnen Summanden in der Summe gleich 0 zu setzen. Das wäre im Allgemeinen aber nicht richtig, da die vorhandenen Zwangsbedingungen im Allgemeinen Beziehungen zwischen den kartesischen Komponenten der einzelnen Ortsvektoren festlegen, man kann diese also nicht unabhängig betrachten. Allerdings kann man verallgemeinerte Koordinaten  $q_1, \dots, q_f$  betrachten, die das gesamte System der  $N$  Teilchen beschreiben. Wie bereits im diskutierte, wollen wir diese so wählen, dass  $f - k$  dieser Koordinaten  $q_1, \dots, q_{f-k}$  die erlaubte Bewegung beschreiben und die übrigen  $k$   $q_{f-k+1}, \dots, q_f$  durch die Zwangsbedingungen festgelegt sind – wir können die Koordinaten  $q_1, \dots, q_f$  immer so "sortieren", dass die Aufteilung in "frei" und "fest" wie angeführt ist. Insbesondere heißt das, dass die  $f - k$  "freien" verallgemeinerten Koordinaten  $q_1, \dots, q_{f-k}$  *unabhängig* sind, es sind also im Prinzip Bewegungen erlaubt in denen sich nur eine der Koordinaten ändert und die anderen konstant sind. Wir können das wie folgt ausnutzen. Wir betrachten den Ortsvektor als Funktion der freien verallgemeinerten Koordinaten

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, \dots, q_{f-k}).$$

Dann lassen sich die virtuellen Verrückungen  $\delta \vec{r}_i$  in einzelne Verrückungen der freien Koordinaten entwickeln

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{f-k} \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} \delta q_j.$$

Wir setzen nun diese Entwicklung in die Gleichung ohne Zwangskräfte ein.

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{f-k} \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} \delta q_j$$

Da die  $q_j$  unabhängig sind, können wir z.B. den Fall betrachten dass  $\delta q_j$  für ein bestimmtes aber beliebiges  $j$  nicht verschwindet, für alle anderen aber schon. Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, f - k.$$

Wir erhalten also  $f - k$  Gleichungen in denen die Zwangskräfte nicht mehr auftauchen! Das sind gerade die gesuchten  $f - k$  Bewegungsgleichungen für die  $f - k$  freien verallgemeinerten Koordinaten! Diese Gleichungen sind für jedes System mit Zwangsbedingungen gültig und ersparen uns die mühselige Arbeit, die Zwangskräfte "zu Fuss" zu diskutieren und aus den Newton'schen Bewegungsgleichungen zu eliminieren. Wie wir gleich sehen werden, lassen sich diese Gleichungen noch etwas effizienter umschreiben. Bevor wir das tun, wollen wir uns aber am Beispiel der Bewegung im Kegel vergewissern, dass die allgemeinen Gleichungen dasselbe Resultat ergeben wie unsere kleinteilige Rechnung im vorigen Abschnitt.

Die Verallgemeinerten Koordinaten sind also die Kugelkoordinaten

$$q_1 = r, \quad q_2 = \phi, \quad q_3 = \theta.$$

$q_1$  und  $q_2$  sind frei und  $q_3$  ist durch die Zwangsbedingung festgelegt:  $q_3 = \alpha$ . Es gilt

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\alpha) \\ \sin(\phi) \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} = q_1 \begin{pmatrix} \cos(q_2) \sin(\alpha) \\ \sin(q_2) \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Daraus können wir wie zuvor  $\ddot{\vec{r}}$  berechnen

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \left( \ddot{r} \cos(\phi) - 2\dot{r}\dot{\phi} \sin(\phi) - r\ddot{\phi} \sin(\phi) - r\dot{\phi}^2 \cos(\phi) \right) \sin(\alpha) \\ \left( \ddot{r} \sin(\phi) + 2\dot{r}\dot{\phi} \cos(\phi) + r\ddot{\phi} \cos(\phi) - r\dot{\phi}^2 \sin(\phi) \right) \sin(\alpha) \\ \ddot{r} \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist die Kraft

$$\vec{F} = \vec{F}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen jetzt noch

$$\frac{d\vec{r}}{dq_1} = \frac{d\vec{r}}{dr} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\alpha) \\ \sin(\phi) \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{r}}{dq_2} = \frac{d\vec{r}}{d\phi} = r \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \sin(\alpha) \\ \cos(\phi) \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die neu gefundenen Gleichungen sind in unserem Fall

$$\left( m\ddot{\vec{r}} - \vec{F} \right) \cdot \frac{d\vec{r}}{dq_1} = 0, \quad \left( m\ddot{\vec{r}} - \vec{F} \right) \cdot \frac{d\vec{r}}{dq_2} = 0.$$

Einsetzen der Vektoren liefert nach kurzer Rechnung:

$$\left( m\ddot{\vec{r}} - \vec{F} \right) \cdot \frac{d\vec{r}}{dq_1} = m \left( \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2(\alpha) + g \cos(\alpha) \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2(\alpha) + g \cos(\alpha) = 0$$

$$\left(m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}\right) \cdot \frac{d\vec{r}}{dq_2} = mr \sin^2(\alpha) \left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0$$

Wir finden also die bereits bekannten Bewegungsgleichungen!

### 3.3 Die Lagrange'schen Gleichungen

Wir wollen nun wie angekündigt die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i\right) \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, f - k,$$

die in dieser Form bereits die effiziente Aufstellung der Bewegungsgleichungen für die  $q_j$  erlauben, noch etwas effizienter formulieren.

Als erstes wollen wir den Term

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j}$$

umschreiben. Dazu machen wir einige Nebenrechnungen. Nach Annahme ist  $\vec{r}$  eine Funktion der verallgemeinerten Koordinaten  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, f - k$ . Wir erwarten, dass  $\dot{\vec{r}}$  von  $q_j$  aber auch  $\dot{q}_j$  abhängt. Wir wollen nun die Ableitung von  $\dot{\vec{r}}$  nach  $\dot{q}_j$  berechnen. Es gilt nach Kettenregel

$$\dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^{f-k} \frac{d\vec{r}}{dq_i} \frac{dq_i}{dt} = \sum_{i=1}^{f-k} \frac{d\vec{r}}{dq_i} \dot{q}_i.$$

Wenn wir die letzte Summe nach  $\dot{q}_j$  ableiten, sind die Ableitungen von  $\vec{r}$  nach  $q_i$  konstant in  $\dot{q}_i$ . Es bleibt also beim Ableiten nur der eine Term übrig in dem  $i = j$  ist. Es folgt also

$$\frac{d\dot{\vec{r}}}{d\dot{q}_j} = \frac{d\vec{r}}{dq_j},$$

die "Zeitableitungen kürzen sich also heraus". Als nächstes wollen wir die Ableitung von  $\dot{\vec{r}}$  nach  $q_j$  selbst berechnen. Einerseits gilt durch Ableiten des obigen Ausdrucks für  $\dot{\vec{r}}$

$$\frac{d\dot{\vec{r}}}{dq_j} = \sum_{i=1}^{f-k} \frac{d^2\vec{r}}{dq_i dq_j} \dot{q}_i$$

und andererseits gilt nach Kettenregel

$$\frac{d}{dt} \frac{d\vec{r}}{dq_j} = \sum_{i=1}^{f-k} \frac{d^2\vec{r}}{dq_i dq_j} \dot{q}_i.$$

Daraus folgt

$$\frac{d\dot{\vec{r}}}{dq_j} = \frac{d}{dt} \frac{d\vec{r}}{dq_j},$$

es spielt also keine Rolle ob man  $\vec{r}$  zuerst nach  $t$  und dann nach  $q_j$  ableitet oder umgekehrt.

Wir betrachten nun

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j}.$$

Die Summe über  $i$  spielt zunächst keine Rolle. Wir berechnen mit Hilfe unserer Nebenrechnungen

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} \right) = \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} \right) = \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} + \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} = \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} + \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d\dot{\vec{r}}_i}{dq_j}.$$

Es gilt also (für konstantes  $m_i$ )

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} = \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d\dot{\vec{r}}_i}{dq_j}.$$

Wir erinnern uns dass die kinetische Energie  $T_i$  definiert war als

$$T_i = \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2.$$

Die beiden Terme in der vorletzten Gleichung sind aber nichts anderes als Ableitungen dieser Größe! Es gilt also

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} = \frac{d}{dt} \frac{dT_i}{dq_j} - \frac{dT_i}{dq_j}$$

und damit

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{d}{dt} \frac{dT_i}{dq_j} - \frac{dT_i}{dq_j} \right) = \frac{d}{dt} \frac{dT}{dq_j} - \frac{dT}{dq_j}.$$

Wir diskutieren schließlich den Term

$$- \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j}.$$

Wir nehmen an, dass  $\vec{F}_i$  ein konservatives Kraftfeld ist, das aus einem für alle  $N$  Teilchen gültigen Potential  $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  resultiert

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U.$$

Dann gilt nach Kettenregel

$$- \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} = \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i U \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} = \frac{dU}{dq_j}.$$

Wir finden also

$$\sum_{i=1}^N \left( m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} = \frac{d}{dt} \frac{dT}{dq_j} - \frac{dT}{dq_j} + \frac{dU}{dq_j} = 0.$$

Wir können diese Identität wie folgt umschreiben. Wir definieren ...

... die *Lagrangefunktion*

$$L = T - U.$$

Es gelten die *Lagrange-Gleichungen*

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{q}_j} - \frac{dL}{dq_j} = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, f - k.$$

Diese Gleichungen werden in der Literatur oft die Lagrange-Gleichungen zweiter Art genannt. Die Lagrange-Gleichungen erster Art sind gewissermaßen die Newton'schen Bewegungsgleichungen mit Zwangskräften, wobei die Zwangskräfte durch die Bedingung senkrecht auf Tangentialvektoren zu stehen eingeschränkt sind und ihre Komponenten somit gewisse Relationen erfüllen. In der weiteren Vorlesung wollen wir diese Lagrange'schen Gleichungen erster Art allerdings nicht weiter betrachten.

Die Lagrange'schen Gleichungen sind die gesuchten effektiv formulierten  $f - k$ -Bewegungsgleichungen für die  $f - k$  freien verallgemeinerten Koordinaten die wir aus dem d'Alembert'schen Prinzip und den Newton'schen Bewegungsgleichungen hergeleitet haben.

**Bedienungsanleitung für die Lagrange-Gleichungen** Wir fassen zusammen, wie man die Lagrange-Gleichungen verwendet, um die Bewegungsgleichungen eines  $N$ -Teilchen Systems mit  $f$  Freiheitsgraden und  $k$  Zwangsbedingungen effizient zu bestimmen, falls die vorhandenen Kräfte (ausgenommen die Zwangskräfte) konservativ sind. Einige Beispiele dafür wurden bereits und werden in den Übungen behandelt, andere werden wir in der Vorlesung diskutieren.

1. Wähle  $f$  verallgemeinerte Koordinaten  $q_1, \dots, q_f$  die zur Beschreibung des Systems gut geeignet sind. Diese können ganz oder teilweise kartesisch oder vollständig nicht-kartesisch sein. Wähle die Koordinaten so, dass  $q_1, \dots, q_{f-k}$  frei sind und  $q_{f-k+1}, \dots, q_f$  durch die Zwangsbedingungen festgelegt.
2. Drücke die Ortsvektoren  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$  der  $N$  Teilchen durch die  $q_1, \dots, q_f$  aus. Drücke die Geschwindigkeiten  $\dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N$  durch die  $q_1, \dots, q_f$  und  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$  aus, d.h. berechne die Zeitableitungen der durch die  $q_1, \dots, q_f$  ausgedrückten Ortsvektoren. Verwende dabei die Zwangsbedingungen - d.h. in der Regel  $\dot{q}_{f-k+1} = \dots = \dot{q}_f = 0$  mit der obigen Wahl der Koordinaten.
3. Drücke die gesamte kinetische Energie  $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2$  durch  $q_1, \dots, q_f$  und  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{f-k}$  aus, unter Beachtung der Zwangsbedingungen.
4. Verfahre ebenso für die gesamte potentielle Energie  $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ . Wichtig: sind die Nicht-Zwangskräfte  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_N$  auf die  $N$  Teilchen gegeben, dann ist  $U$  aus den  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_N$  so zu bestimmen, dass für alle  $i = 1, \dots, N$  gilt  $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U$ . D.h. die Zwangskräfte und Zwangsbedingungen gehen zunächst *nicht* in die Bestimmung von  $U$  ein! Erst nachdem

ein  $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  gefunden ist, das ein gemeinsames Potential für alle  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_N$  ist, drückt man  $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  durch  $q_1, \dots, q_f$  aus indem man  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$  durch  $q_1, \dots, q_f$  ausdrückt und das Ergebnis in  $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  einsetzt.

5. Benutze die Ergebnisse für  $T$  und  $U$  um die Lagrangefunktion  $L = T - U$  in Abhängigkeit von  $q_1, \dots, q_f$  und  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{f-k}$  zu bestimmen. Berechne die Lagrange-Gleichungen  $\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_j} - \frac{dL}{dq_j} = 0$  für alle  $j = 1, \dots, f - k$ . Die Lagrange-Gleichungen sind Differentialgleichungen in denen  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$  sowie  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{f-k}$  und  $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_{f-k}$  auftauchen. Sie legen also  $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_{f-k}$  in Abhängigkeit von  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$  und  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{f-k}$  fest. Die Lösung dieser Gleichungen mit gegebenen Anfangsbedingungen legen die Bewegung des Systems eindeutig fest.
6. Die beschriebene Vorgehensweise ist auch gültig wenn  $k = 0$ , wenn es also gar keine Zwangskräfte gibt und alle verallgemeinerten Koordinaten frei sind. Beispiel: für ein freies Teilchen in einer Raumdimension ist  $L = T - U = T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ . Mit  $q = x$  lautet die Lagrange-Gleichung  $\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq} - \frac{dL}{dq} = \frac{d}{dt}(m\dot{q}) = m\ddot{q} = m\ddot{x} = 0$ .
7. Die beschriebene Vorgehensweise ist auch gültig wenn die Massen  $m_1, \dots, m_N$  der  $N$  Teilchen nicht konstant sind, sondern orts- und/oder zeitabhängig wie (z.B. bei der Peitsche). Insbesondere sind die Lagrange-Gleichungen auch sinnvoll, wenn  $L$  nicht nur von  $q_1, \dots, q_f$  und  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$  abhängt, sondern auch noch explizit von der Zeit  $t$ .
8. Die beschriebene Vorgehensweise ist auch gültig - d.h. die Lagrange-Gleichungen sind auch sinnvoll - wenn das Potential  $U$  geschwindigkeitsabhängig ist.

### 3.4 Kanonische Impulse

Wir wollen den in den Lagrange-Gleichungen auftretenden Größen einen Namen geben. Wir nennen

$$p_i = \frac{dL}{dq_i}$$

den zu  $q_i$  *kanonisch konjugierten Impuls*. Andere verwendete Bezeichnungen sind kurz *kanonischer Impuls* oder *konjugierter Impuls* oder *verallgemeinerter Impuls*. Die Motivation für diese Bezeichnung wird klar, wenn man den Fall kartesischer Koordinaten betrachtet. Für z.B. ein Teilchen in drei Raumdimensionen mit  $(q_1, q_2, q_3) = (x_1, x_2, x_3)$  ist - wenn  $U$  nicht von der Geschwindigkeit abhängt -

$$\frac{dL}{dq_i} = \frac{dT}{dq_i} = \frac{d}{dq_i} \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i^2 = m\dot{q}_i,$$

$p_i$  ist in diesem Fall also einfach die  $i$ -te Komponente des "eigentlichen" Impulses. Wir verwenden hier und im folgenden dieselbe Notation  $p_i$  für den verallgemeinerten Impuls, die wir früher für den eigentlichen Impuls verwendet haben. Aus dem Kontext sollte immer klar sein, was jeweils gemeint ist. Wenn wir eine verallgemeinerte Koordinate mit einem eigenen Buchstaben bezeichnen, z.B.  $\alpha$ , bezeichnen wir den dazu konjugierten kanonischen Impuls mit  $p_\alpha$ .

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen besagen, dass die zeitliche Änderung des eigentlichen Impulses (in einem Inertialsystem) gerade die Kraft ist. Die Lagrange-Gleichungen besagen

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_i} = \frac{dL}{dq_i}.$$

Es ist also sinnvoll,

$$\frac{dL}{dq_i}$$

als *verallgemeinerte Kraft(-komponente)* aufzufassen. Diese Größe ist allerdings von geringerer Bedeutung als der verallgemeinerte Impuls.

**Beispiel** Wir betrachten ein Teilchen in drei Raumdimensionen in Kugelkoordinaten  $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \phi)$ . Es ist

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun zunächst  $\dot{\vec{r}}$  berechnen, daraus die kinetische Energie und daraus schließlich den verallgemeinerten Impuls  $p_\phi = p_3$ . Um unübersichtliche lange Rechnungen zu vermeiden, drücken wir alles in der Kugelbasis  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$  aus.

$$\vec{e}_r = \left. \frac{d\vec{r}}{dr} \right|_{\text{normiert}} = \left. \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \right|_{\text{normiert}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_\theta = \left. \frac{d\vec{r}}{d\theta} \right|_{\text{normiert}} = r \left. \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\theta) \\ \sin(\phi) \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \right|_{\text{normiert}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\theta) \\ \sin(\phi) \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\phi = \left. \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right|_{\text{normiert}} = r \left. \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\phi) \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \right|_{\text{normiert}} = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix},$$

Es gilt

$$\frac{d\vec{r}}{dr} = \vec{e}_r, \quad \frac{d\vec{r}}{d\theta} = r\vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{r}}{d\phi} = r \sin(\theta)\vec{e}_\phi$$

und

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi, \quad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_r, \quad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta,$$

die drei Vektoren sind also insbesondere paarweise orthogonal.  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$  bilden folglich ein Rechtssystem.

Wir können nun  $\dot{\vec{r}}$  bequem berechnen

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dr} \dot{r} + \frac{d\vec{r}}{d\theta} \dot{\theta} + \frac{d\vec{r}}{d\phi} \dot{\phi} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin(\theta) \vec{e}_\phi$$

und daraus die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) \right)$$

Wir berechnen jetzt den zu  $\phi$  konjugierten Impuls  $p_\phi = p_3$  für den Fall dass  $U$  nicht geschwindigkeitsabhängig ist

$$p_\phi = p_3 = \frac{dL}{dq_3} = \frac{dL}{d\dot{\phi}} = \frac{dT}{d\dot{\phi}} = mr^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}.$$

Um zu verstehen, was diese Größe physikalisch ist, berechnen wir den Drehimpuls  $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ .

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = mr\vec{e}_r \times \left( \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin(\theta)\vec{e}_\phi \right) = mr^2 \left( \dot{\theta}\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta + \dot{\phi}\sin(\theta)\vec{e}_r \times \vec{e}_\phi \right) \\ &= mr^2 \left( \dot{\theta}\vec{e}_\phi - \dot{\phi}\sin(\theta)\vec{e}_\theta \right) = mr^2 \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\sin(\phi) - \dot{\phi}\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \dot{\theta}\cos(\phi) - \dot{\phi}\sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \dot{\phi}\sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$p_\phi$  ist also die  $z$ -Komponente des Drehimpulses.

### 3.5 Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen

Eine wichtige Eigenschaft der Lagrange-Gleichungen ist, dass sie in allen Koordinatensystemen gültig sind, d.h. unabhängig von der Wahl der  $q_1, \dots, q_f$  immer dieselbe Form haben. Für die Newton'schen Bewegungsgleichungen gilt das nicht: diese haben nur in allen Inertialsystemen dieselbe Form.

Die Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen bedeutet konkret (hier der Einfachheit halber für den Fall ohne Zwangsbedingungen): sind zwei Sätze von Koordinaten  $q_1, \dots, q_f$  und  $Q_1, \dots, Q_f$  gegeben, wobei letztere jeweils eine Funktion der ersteren und der Zeit sein dürfen  $Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_f, t)$ , dann gelten die Lagrange-Gleichungen für  $q_1, \dots, q_f$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_j} - \frac{dL}{dq_j} = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, f.$$

genau dann wenn die Lagrange-Gleichungen für  $Q_1, \dots, Q_f$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dQ_j} - \frac{dL}{dQ_j} = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, f.$$

gelten. Anstatt diese Aussage mathematisch zu beweisen (die dafür notwendige Rechnung ist vergleichbar mit der Herleitungen der Lagrange-Gleichungen), betrachten wir ein Beispiel.

**Beispiel** Wir betrachten die kräftefreie Bewegung eines Teilchens mit konstanter Masse  $m$  auf einer mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  im Ursprung zentrierten rotierenden Kreisscheibe in  $x_1$ - $x_2$ -Ebene. In "inertialen Polarkoordinaten"  $(r, \phi)$  gilt

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad m\ddot{\vec{r}} = m \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos(\phi) - 2\dot{r}\dot{\phi} \sin(\phi) - r\ddot{\phi} \sin(\phi) - r\dot{\phi}^2 \cos(\phi) \\ \ddot{r} \sin(\phi) + 2\dot{r}\dot{\phi} \cos(\phi) + r\ddot{\phi} \cos(\phi) - r\dot{\phi}^2 \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0},$$

also

$$\ddot{r} \cos(\phi) - 2\dot{r}\dot{\phi} \sin(\phi) - r\ddot{\phi} \sin(\phi) - r\dot{\phi}^2 \cos(\phi) = 0 \quad \ddot{r} \sin(\phi) + 2\dot{r}\dot{\phi} \cos(\phi) + r\ddot{\phi} \cos(\phi) - r\dot{\phi}^2 \sin(\phi)$$

Wenn wir die erste Gleichung mit  $\cos(\phi)$  multiplizieren und die zweite mit  $\sin(\phi)$  und die Ergebnisse addieren, finden wir eine Bewegungsgleichung für  $r$

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = 0.$$

Einsetzen dieser Gleichung in die erste oder zweite ursprüngliche Gleichung liefert eine Bewegungsgleichung für  $\phi$

$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 0.$$

Wir betrachten nun "mitrotierende Polarkoordinaten"  $(r', \phi')$  mit  $r = r'$ ,  $\phi' = \phi - \omega t$ . Wie wir wissen, ist die obige Newton'sche Bewegungsgleichung nicht gültig, wenn man  $(r, \phi)$  durch  $(r', \phi')$  ersetzt, da man Scheinkräfte berücksichtigen muss. Entsprechend sind die abgeleiteten Bewegungsgleichungen für  $r$  und  $\phi$  nicht gültig wenn man  $(r, \phi)$  durch  $(r', \phi')$  ersetzt.

Für die Gültigkeit der Lagrange-Gleichungen ist das kein Hindernis. In den inertialen Polarkoordinaten  $(q_1, q_2) = (r, \phi)$  bekommen wir

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos(\phi) - r\dot{\phi} \sin(\phi) \\ \dot{r} \sin(\phi) + r\dot{\phi} \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L = T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_1} - \frac{dL}{dq_1} = \frac{d}{dt} (m\dot{q}_1) - m q_1 \dot{q}_2^2 = m(\ddot{q}_1 - q_1 \dot{q}_2^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_2} - \frac{dL}{dq_2} = \frac{d}{dt} (m q_1^2 \dot{q}_2) - 0 = m(q_1^2 \ddot{q}_2 + 2\dot{q}_1 q_1 \dot{q}_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 0.$$

In den "mitrotierende Polarkoordinaten"  $(Q_1, Q_2) = (r', \phi')$  finden wir hingegen

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r' \cos(\phi' + \omega t) \\ r' \sin(\phi' + \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \cos(Q_2 + \omega t) \\ Q_1 \sin(Q_2 + \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \cos(Q_2 + \omega t) - Q_1(\dot{Q}_2 + \omega) \sin(Q_2 + \omega t) \\ \dot{Q}_1 \sin(Q_2 + \omega t) + Q_1(\dot{Q}_2 + \omega) \cos(Q_2 + \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad L = T = \frac{m}{2} \left( \dot{Q}_1^2 + Q_1^2(\dot{Q}_2 + \omega)^2 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{Q}_1} - \frac{dL}{dQ_1} = \frac{d}{dt} (m\dot{Q}_1) - mQ_1(\dot{Q}_2 + \omega)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{r}' - r'(\dot{\phi}'^2 + 2\dot{\phi}'\omega + \omega^2) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{Q}_2} - \frac{dL}{dQ_2} = \frac{d}{dt} \left( mQ_1^2(\dot{Q}_2 + \omega) \right) - 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r'\ddot{\phi}' + 2\dot{r}'\dot{\phi}' + 2\dot{r}'\omega = 0.$$

Die Terme linear in  $\omega$  entsprechen gerade der Coriolisbeschleunigung, und die Terme quadratisch in  $\omega$  der Zentrifugalbeschleunigung.

### 3.6 Symmetrien und Erhaltungsgrößen im Lagrange-Formalismus

Ein weiterer Vorteil des Lagrange'schen Zugangs zur klassischen Mechanik (des sog. *Lagrange-Formalismus*), ist die Tatsache, dass sich Erhaltungsgrößen besonders leicht identifizieren lassen, d.h. es ist in der Regel leichter als im Newton'schen Zugang zu zeigen, dass eine bestimmte Größe zeitlich erhalten ist.

In diesem Zusammenhang lässt sich eine Erhaltungsgröße streng formal wie folgt definieren.

Eine Erhaltungsgröße ist eine Funktion  $A(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$  die von den verallgemeinerten Koordinaten, ihren Ableitungen und der Zeit abhängt, so dass gilt: für beliebige Lösungen  $q_1(t), \dots, q_f(t)$  der Bewegungsgleichungen – d.h. der Lagrange-Gleichungen – ist  $\frac{d}{dt} A(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t), t) = 0$ .

Eine einfache Klasse von Erhaltungsgrößen ergibt sich sofort aus den Lagrange-Gleichungen. Wir wissen, dass die Zeitableitung der verallgemeinerten Impulse den verallgemeinerten Kräften entsprechen.

$$\frac{d}{dt} p_i = \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{q}_i} = \frac{dL}{dq_i}$$

Wenn diese für eine bestimmte Koordinate verschwinden, dann ist  $p_i$  erhalten. Das ist gerade der Fall wenn  $L$  nicht von  $q_i$  selbst abhängt, sondern nur von  $\dot{q}_i$ . Man spricht dann davon, dass  $q_i$  *zyklisch* ist. Nach Möglichkeit sollte man die  $q_i$  also so wählen, dass möglichst viele zyklisch sind – denn wir haben gesehen, dass die Kenntnis von Erhaltungsgrößen die Lösung der Bewegungsgleichungen deutlich vereinfacht.

**Beispiel** Wir betrachten wieder ein Teilchen mit konstanter Masse in drei Raumdimensionen, zunächst in kartesischen Koordinaten. Wenn  $U$  und damit  $L$  räumlich konstant – d.h. translationsinvariant – ist, also in Abwesenheit von Kräften, dann sind alle Impulse  $p_i$  erhalten. Wir wählen nun Kugelkoordinaten. Wenn  $U$  und damit  $L$  nicht von  $\phi$  abhängt, d.h. wenn das System invariant unter Drehungen um die  $z$ -Achse ist, dann ist  $p_\phi$ , also die  $z$ -Komponente des Drehimpulses erhalten.

Wir wollen nun weitere Erhaltungsgrößen untersuchen, die man direkt aus den Eigenschaften der Lagrange-Funktion ableiten kann. Dazu diskutieren wir das *Noether-Theorem* – benannt nach der Mathematikerin Emmy Noether (1882 - 1935). In Worten lautet das Noether-Theorem:

Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie der Lagrange-Funktion existiert eine entsprechende Erhaltungsgröße.

Um das Noether-Theorem als mathematische Aussage zu formulieren, müssen wir zunächst definieren, was eine “kontinuierliche Symmetrie” ist. Dazu betrachten wir kontinuierliche Transformationen von Bahnkurven, d.h. in einem System von  $N$  Teilchen bilden wir jede Bahnkurve  $\vec{r}_i(t)$  auf eine neue Bahnkurve  $\vec{r}_i(t, \alpha)$  ab, wobei diese Abbildung von einem kontinuierlichen Parameter  $\alpha$  abhängt, d.h.  $\alpha$  ist eine reelle Zahl.

$$\vec{r}_i(t) \mapsto \vec{r}_i(t, \alpha) \quad \text{für alle } i = 1, \dots, N$$

Wenn wir verallgemeinerte Koordinaten  $q_j$  wählen und die Bahnkurven darin ausdrücken, dann entspricht die Transformation einer Abbildung

$$q_j(t) \mapsto q_j(t, \alpha) \quad \text{für alle } j = 1, \dots, f$$

**Beispiele für kontinuierliche Transformationen** Beispiele für kontinuierliche Transformationen sind die uns bekannten Galilei-Transformationen.

1. Räumliche Translationen: Wir verschieben jede Bahnkurve um einen konstanten Vektor  $\vec{s}$  mit Länge  $\alpha$ , z.B.  $\vec{s} = \alpha \vec{e}_1$ . In kartesischen Koordinaten heißt das also

$$x_{i,j}(t) \mapsto \begin{cases} x_{i,1}(t) + \alpha & \text{für } j = 1 \\ x_{i,j}(t) & \text{für } j = 2, 3 \end{cases} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, N.$$

2. Zeitliche Translationen: Wir verschieben den Zeitnullpunkt.

$$\vec{r}_i(t) \mapsto \vec{r}_i(t + \alpha) \quad \text{für alle } i = 1, \dots, N$$

3. Drehungen: Drehung um eine konstante Achse  $\vec{s}$  mit konstantem Winkel  $\alpha$ , z.B.  $\vec{s} = \vec{e}_3$ .

$$\vec{r}_i(t) \mapsto D(3, \alpha) \vec{r}_i(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{r}_i(t) \quad \text{für alle } i = 1, \dots, N$$

4. Spezielle Galileitransformationen: Wir verschieben jede Bahnkurve um einen Zeitabhängigen Beitrag mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}$ ,  $\alpha = |\vec{v}|$ , z.B.  $\vec{v} = \alpha \vec{e}_1$ . In kartesischen Koordinaten heißt das also

$$x_{i,j}(t) \mapsto \begin{cases} x_{i,1}(t) + \alpha t & \text{für } j = 1 \\ x_{i,j}(t) & \text{für } j = 2, 3 \end{cases} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, N.$$

Wann ist eine kontinuierliche Transformation eine Symmetrie? Die Idee ist:

Eine kontinuierliche Transformation  $\vec{r}_i(t) \mapsto \vec{r}_i(t, \alpha)$  ist eine Symmetrie, wenn Sie Bahnkurven, die die Bewegungsgleichungen erfüllen, in ebensolche Bahnkurven abbildet.

Wir wollen in diesem Zusammenhang natürlich die Lagrange-Gleichungen als Bewegungsgleichungen auffassen. D.h. wir verlangen (der Einfachheit halber ohne Zwangsbedingungen): wenn eine Bahnkurve in verallgemeinerten Koordinate  $q_j$  ausgedrückt die Lagrange-Gleichungen erfüllt, d.h.

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_j} - \frac{dL}{dq_j} = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, f,$$

$$\text{wobei } L = L(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t), t),$$

dann soll auch gelten

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_j} - \frac{dL}{dq_j} = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, f,$$

$$\text{wobei } L = L(q_1(t, \alpha), \dots, q_f(t, \alpha), \dot{q}_1(t, \alpha), \dots, \dot{q}_f(t, \alpha), t).$$

An dieser Stelle ist es hilfreich sich zu klarzumachen, dass z.B. der Ausdruck

$$\frac{dL(q_1(t, \alpha), \dots, q_f(t, \alpha), \dot{q}_1(t, \alpha), \dots, \dot{q}_f(t, \alpha), t)}{dq_j}$$

bedeutet, dass man die Funktion  $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$  nach  $q_j$  ableitet und anschließend alle  $q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$  durch  $q_1(t, \alpha), \dots, q_f(t, \alpha), \dot{q}_1(t, \alpha), \dots, \dot{q}_f(t, \alpha)$  ersetzt.

Offenbar ist eine kontinuierliche Transformation eine Symmetrie, wenn gilt

$$L(q_1(t, \alpha), \dots, q_f(t, \alpha), \dot{q}_1(t, \alpha), \dots, \dot{q}_f(t, \alpha), t) = L(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t), t),$$

wenn sich also die Lagrange-Funktion durch die kontinuierliche Transformation nicht ändert. Man spricht, dann davon, dass “ $L$  unter der Transformation invariant ist”. Denn wenn sich  $L$  nicht ändert, dann bleiben auch die Ableitungen von  $L$  gleich, also z.B.

$$\frac{dL(q_1(t, \alpha), \dots, q_f(t, \alpha), \dot{q}_1(t, \alpha), \dots, \dot{q}_f(t, \alpha), t)}{dq_j} = \frac{dL(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t), t)}{dq_j}$$

und die Lagrange-Gleichungen gelten dann für die “neue” Bahnkurve wenn sie für die “alte” bereits gültig waren.

Die Invarianz der Lagrange-Funktion ist allerdings eine zu “strenge” Bedingung. Denn die Gültigkeit der Lagrange-Gleichungen bleibt auch erhalten wenn es eine Funktion

$X(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$  gibt, so dass gilt

$$\begin{aligned} &L(q_1(t, \alpha), \dots, q_f(t, \alpha), \dot{q}_1(t, \alpha), \dots, \dot{q}_f(t, \alpha), t) \\ &= L(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t), t) + \alpha \frac{d}{dt} X(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t), t). \end{aligned}$$

Diese Tatsache wollen wir nun verifizieren. Dazu benötigen wir zwei Nebenrechnungen, die ähnlich derer sind, die wir für die Herleitung der Lagrange-Gleichungen selbst benötigt haben. Der Einfachheit halber stellen wir diese Nebenrechnungen für den Fall an, dass  $X$  nicht explizit von der Zeit abhängt, sondern nur implizit über die  $q_j(t)$  und ihre Ableitungen  $\dot{q}_j(t)$ . Außerdem nehmen wir weiterhin an, dass  $X$  nicht von den Ableitungen  $\dot{q}_j$  abhängt, sondern nur von  $q_j$  selbst.

Zuerst berechnen wir  $\frac{d}{dt} X$ . Es gilt nach Kettenregel

$$\dot{X} = \frac{d}{dt} X = \frac{d}{dt} X(q_1(t), \dots, q_f(t)) = \sum_{i=1}^f \frac{dX}{dq_i} \dot{q}_i.$$

Im Ausdruck ganz rechts hängt  $\frac{dX}{dq_i}$  nur von  $q_1, \dots, q_f$ , es gilt also

$$\frac{d\dot{X}}{d\dot{q}_j} = \frac{dX}{dq_j},$$

wir können also wieder “Zeitableitungen kürzen”. Wenn wir den Ausdruck für  $\dot{X}$  nach  $q_j$  ableiten, finden wir, da  $\dot{q}_i$  nicht von  $q_j$  abhängt,

$$\frac{d\dot{X}}{dq_j} = \sum_{i=1}^f \frac{d^2 X}{dq_i dq_j} \dot{q}_i.$$

Andererseits gilt nach Kettenregel

$$\frac{d}{dt} \frac{dX}{dq_j} = \sum_{i=1}^f \frac{d^2 X}{dq_i dq_j} \dot{q}_i.$$

Wir finden also

$$\frac{d}{dt} \frac{dX}{dq_j} = \frac{d\dot{X}}{dq_j},$$

d.h. für die Ableitung von  $X$  nach  $t$  und  $q_j$  spielt es keine Rolle welche der Ableitungen man zuerst durchführt. Wir betrachten jetzt den Fall, dass die kontinuierliche Transformation  $L$  in  $L' = L + \alpha \dot{X}$  überführt. Es gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{dL'}{dq_j} - \frac{dL'}{dq_j} = \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_j} - \frac{dL}{dq_j}}_{=0} + \alpha \left( \frac{d}{dt} \frac{d\dot{X}}{dq_j} - \frac{d\dot{X}}{dq_j} \right) = \alpha \left( \frac{d}{dt} \frac{d\dot{X}}{dq_j} - \frac{d\dot{X}}{dq_j} \right),$$

weil die "alte" Bahnkurve ja nach Annahme die Lagrange-Gleichungen löst. Aus unseren Nebenrechnungen folgt allerdings auch

$$\frac{d}{dt} \frac{d\dot{X}}{dq_j} - \frac{d\dot{X}}{dq_j} = \frac{d}{dt} \frac{dX}{dq_j} - \frac{dX}{dq_j} = \frac{d\dot{X}}{dq_j} - \frac{d\dot{X}}{dq_j} = 0.$$

Der Zusatzterm  $\alpha \dot{X}$  hat also keinen Einfluss auf die Bewegungsgleichungen, weil die Lagrange-Gleichungen für diesem Term immer automatisch erfüllt sind. Diese Aussage bleibt auch richtig, wenn man erlaubt, dass  $X$  von den Ableitungen  $\dot{q}_j$  und explizit von der Zeit  $t$  abhängt. Offenbar ist die Gültigkeit der Lagrange-Gleichungen auch erhalten wenn  $L$  durch die Transformation auf

$$L + \alpha \frac{d}{dt} X + \alpha^2 \frac{d}{dt} X_2 + \alpha^3 \frac{d}{dt} X_3 + \dots$$

abgebildet wird, diese Fälle sind also auch Symmetrien.

Wir wollen jetzt aus der Tatsache, dass eine kontinuierliche Transformation eine Symmetrie ist, die Existenz einer Erhaltungsgröße herleiten. Ausgangspunkt ist die Transformation von  $L$ .

$$\begin{aligned} & L(q_1(t, \alpha), \dots, q_f(t, \alpha), \dot{q}_1(t, \alpha), \dots, \dot{q}_f(t, \alpha), t) \\ &= L(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t), t) + \alpha \frac{d}{dt} X(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t), t). \end{aligned}$$

Wir leiten diese Gleichung nach  $\alpha$  ab und setzen anschließend  $\alpha = 0$ . Wir erhalten dann

$$\left. \frac{d}{d\alpha} L(q_1(t, \alpha), \dots, q_f(t, \alpha), \dot{q}_1(t, \alpha), \dots, \dot{q}_f(t, \alpha), t) \right|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} X(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t), t).$$

Wir wollen nun die linke Seite dieser Gleichung berechnen. Wir berechnen zuerst die Ableitung nach  $\alpha$  ohne  $\alpha = 0$  zu setzen. Es gilt nach Kettenregel

$$\frac{d}{d\alpha} L(q_1(t, \alpha), \dots, q_f(t, \alpha), \dot{q}_1(t, \alpha), \dots, \dot{q}_f(t, \alpha), t) = \sum_{i=1}^f \frac{dL}{dq_i} \frac{dq_i(t, \alpha)}{d\alpha} + \sum_{i=1}^f \frac{dL}{d\dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i(t, \alpha)}{d\alpha}.$$

Wir verwenden nun die Tatsache, dass die Transformierte Bahnkurve die Lagrange-Gleichung erfüllt um  $\frac{dL}{dq_i}$  durch  $\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_i}$  zu ersetzen:

$$\frac{d}{d\alpha} L(q_1(t, \alpha), \dots, q_f(t, \alpha), \dot{q}_1(t, \alpha), \dots, \dot{q}_f(t, \alpha), t) = \sum_{i=1}^f \left( \frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_i} \right) \frac{dq_i(t, \alpha)}{d\alpha} + \sum_{i=1}^f \frac{dL}{dq_i} \frac{d\dot{q}_i(t, \alpha)}{d\alpha}.$$

Da  $\alpha$  konstant sein soll, gilt außerdem

$$\frac{d}{dt} \frac{dq_i(t, \alpha)}{d\alpha} = \frac{d\dot{q}_i(t, \alpha)}{d\alpha}$$

und damit

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\alpha} L(q_1(t, \alpha), \dots, q_f(t, \alpha), \dot{q}_1(t, \alpha), \dots, \dot{q}_f(t, \alpha), t) \\ &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_i} \right) \frac{dq_i(t, \alpha)}{d\alpha} + \sum_{i=1}^f \frac{dL}{dq_i} \frac{d}{dt} \frac{dq_i(t, \alpha)}{d\alpha} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^f \frac{dL}{dq_i} \frac{dq_i(t, \alpha)}{d\alpha}. \end{aligned}$$

Wir definieren nun

$$\tau_i = \left. \frac{dq_i(t, \alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}.$$

Insgesamt haben wir dann

$$\left. \frac{d}{d\alpha} L(q_1(t, \alpha), \dots, q_f(t, \alpha), \dot{q}_1(t, \alpha), \dots, \dot{q}_f(t, \alpha), t) \right|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^f \frac{dL}{dq_i} \tau_i = \frac{d}{dt} X$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} Q = 0, \quad Q = \sum_{i=1}^f \frac{dL}{dq_i} \tau_i - X.$$

$Q$  ist gerade die gesuchte Erhaltungsgröße. Wir können nun zusammenfassend das Noether-Theorem formulieren.

Eine kontinuierliche Transformation die  $q_j(t)$  auf  $q_j(t, \alpha)$  abbildet sei eine Symmetrie. D.h. es existiere eine Funktion  $X$  der  $q_j$  und ihrer Ableitungen  $\dot{q}_j$  so dass die kontinuierliche Transformation  $L$  in  $L + \alpha \frac{d}{dt} X$  überführt. Dann ist die Größe  $Q$  definiert als

$$Q = \sum_{i=1}^f \frac{dL}{dq_i} \tau_i - X, \quad \tau_i = \left. \frac{dq_i(t, \alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$$

eine Erhaltungsgröße. Die Aussage bleibt auch gültig wenn die Transformation  $L$  in  $L + \alpha \frac{d}{dt} X + \alpha^2 \frac{d}{dt} X_2 + \alpha^3 \frac{d}{dt} X_3 + \dots$  überführt. Für die Erhaltungsgröße ist nur die "erste Korrekturfunktion"  $X$  relevant.

Als Beispiele für das Noether-Theorem können wir nun wie bereits vorweggenommen zeigen, dass den zehn kontinuierlichen Galileitransformationen eines  $N$ -Teilchen-Systems zehn Erhaltungsgrößen entsprechen.

1. Räumliche Translationen: Wir verschieben jede Bahnkurve um  $\vec{s} = \alpha \vec{e}_1$ . Die kinetische Energie ist invariant unter dieser Transformation weil die Geschwindigkeiten sich nicht ändern. Die potentielle Energie ist invariant wenn wir - wie in früheren Abschnitten - annehmen, dass  $U$  nur von den Verbindungsvektoren  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$  zwischen Teilchenpaaren abhängt. Also ist  $L$  invariant unter räumlichen Translationen ( $X = 0$ ). Wenn wir die  $f = 3N$  kartesischen Koordinaten der  $N$  Teilchen als verallgemeinerte Koordinaten nehmen, dann ist die Erhaltungsgröße

$$Q = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \frac{dL}{d\dot{x}_{i,j}} \tau_{i,j}, \quad \tau_{i,j} = \left. \frac{dx_{i,j}(t, \alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = 1 \\ 0 & \text{für } j = 2, 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q = \sum_{i=1}^N \frac{dL}{d\dot{x}_{i,1}} = \sum_{i=1}^N \frac{dT}{d\dot{x}_{i,1}} = \sum_{i=1}^N p_{i,1} = P_1.$$

Die Erhaltungsgröße ist als gerade die  $x_1$ -Komponente des Gesamtimpulses.

2. Zeitliche Translationen: Wir überprüfen, dass Zeittranslationen eine Symmetrie sind, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt. Da  $T$  nicht explizit von der Zeit abhängt, ist diese Bedingung erfüllt wenn  $U$  nicht explizit von der Zeit abhängt. Um zu überprüfen ob Zeittranslationen eine Symmetrie sind, machen wir eine Taylorentwicklung von

$$L' = L(q'_1(t), \dots, q'_f(t), \dot{q}'_1(t), \dots, \dot{q}'_f(t)), \quad q'_j(t) = q_j(t, \alpha)$$

in  $\alpha$  um  $\alpha = 0$ . Es ist

$$L' = L'|_{\alpha=0} + \alpha \left. \frac{dL'}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} + \frac{1}{2} \alpha^2 \left. \frac{d^2L'}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} + \dots$$

Es gilt - wie bereits besprochen - nach Kettenregel

$$\frac{dL'}{d\alpha} = \sum_{i=1}^f \frac{dL}{dq_i} \frac{dq'_i}{d\alpha} + \sum_{i=1}^f \frac{dL}{d\dot{q}_i} \frac{d\dot{q}'_i}{d\alpha}.$$

Wegen  $q'_j(t) = q_j(t + \alpha)$  gilt

$$\frac{dq'_i}{d\alpha} = \frac{dq_i}{dt}, \quad \frac{d\dot{q}'_i}{d\alpha} = \frac{d\dot{q}_i}{dt} \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{dq'_i}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \dot{q}_i, \quad \left. \frac{d\dot{q}'_i}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \ddot{q}_i.$$

Daraus folgt

$$\left. \frac{dL'}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^f \frac{dL}{dq_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \frac{dL}{d\dot{q}_i} \ddot{q}_i = \frac{dL}{dt}.$$

Man kann genauso mit den anderen Termen in der Taylorentwicklung verfahren und findet

$$L' = L + \alpha \frac{d}{dt} L + \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{d^2}{dt^2} L + \dots$$

Das Ergebnis ist keine Überraschung, denn die Taylorentwicklung von  $L'$  in  $\alpha$  um  $\alpha = 0$  entspricht einer Taylorentwicklung in  $t' = t + \alpha$  um  $t' = t$ . Wir sehen also, dass die Zeittranslationen eine Symmetrie sind mit  $X = L, X_2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} L, \dots$ . Folglich ist

$$Q = \sum_{i=1}^f \frac{dL}{d\dot{q}_i} \dot{q}_i - L, \quad \left( \tau_i = \left. \frac{dq'_i}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \dot{q}_i \right)$$

eine Erhaltungsgröße. Um diese Größe zu interpretieren, betrachten wir den Fall kartesischer Koordinaten und nehmen an, dass  $U$  nicht geschwindigkeitsabhängig ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \frac{dL}{d\dot{x}_{i,j}} \dot{x}_{i,j} - L = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \frac{dT}{d\dot{x}_{i,j}} \dot{x}_{i,j} - T + U = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 m_i \dot{x}_{i,j}^2 - T + U \\ &= 2T - T + U = T + U = E, \end{aligned}$$

die Erhaltungsgröße ist also die Gesamtenergie. Wir wollen nun zeigen, dass  $Q$  auch die Gesamtenergie ist, wenn wir beliebige verallgemeinerte Koordinaten wählen. Es ist – wie bereits besprochen –

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^f \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} \dot{q}_j \quad \Rightarrow \quad T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_k} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f G_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \\ G_{jk} &= \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{r}_i}{dq_j} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_k} = G_{kj} \end{aligned}$$

Es gilt also (für  $U$  nicht geschwindigkeitsabhängig)

$$\frac{dL}{d\dot{q}_j} = \frac{dT}{d\dot{q}_j} = \sum_{k=1}^f G_{jk} \dot{q}_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^f \frac{dL}{d\dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f G_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = 2T.$$

3. Drehungen: Drehungen um beliebige Achsen sind eine Symmetrie wenn  $U$  nur von den Abständen  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  der Verbindungsvektoren zwischen Teilchenpaaren abhängt. Die dazugehörige Erhaltungsgröße ist der Gesamtdrehimpuls bzw. seine Komponente in Richtung der jeweilig betrachteten Drehachse. Mehr dazu in den Übungen.
4. Spezielle Galileitransformationen: Spezielle Galileitransformationen sind eine Symmetrie wenn  $U$  nicht geschwindigkeitsabhängig ist. Die dazugehörige Erhaltungsgröße ist die "Schwerpunktsbewegung"

$$\vec{R}(t) - \frac{\vec{P}}{M} t = \vec{R}(0)$$

bzw. die Komponente von  $\vec{R}(0)$  in der betrachteten Transformationsrichtung. Mehr dazu in den Übungen.

### 3.7 Die Hamiltonfunktion und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen

*Hinweis für alle Nur-Skript-Leser: dieses Kapitel wird vielleicht aus Zeitmangel nicht in der Vorlesung (und Klausur) behandelt und wird deshalb zunächst zurückgestellt, ist jedoch sehr hilfreich für das Verständnis der Quantenmechanik und statistischen Mechanik - Inhalte der Vorlesungen TP3 und TP4. Ich habe es deshalb trotzdem hier an dieser Stelle im Skript aufgeführt und empfehle Ihnen, das Thema spätestens im Laufe von TP3 und TP4 hier (oder natürlich gerne auch in einem Buch) nachzuschlagen.*

$L$  ist eine Funktion der  $q_i$ , ihrer Ableitungen  $\dot{q}_i$  (und evtl. noch explizit eine Funktion der Zeit  $t$ ). Die Ableitung von  $L$  nach  $\dot{q}_j$  ist gerade der kanonische Impuls

$$p_j = \frac{dL}{d\dot{q}_j}.$$

Da  $L$  eine Funktion von  $q_i$  und  $\dot{q}_i$  ist, gilt das auch für  $p_j$ . Wir können diese Abhängigkeit umkehren und  $\dot{q}_j$  als Funktion der  $p_i$  und  $q_i$  ansehen. Streng genommen gilt das nur wenn  $L$  bestimmte Bedingungen erfüllt. Es reicht z.B. aus, dass  $U$  nicht geschwindigkeitsabhängig ist.

**Beispiel** Für ein einzelnes Teilchen ist

$$p_j = m\dot{x}_j = m\dot{q}_j$$

die  $j$ -te Komponente des eigentlichen Impulses. Offenbar ist

$$\dot{q}_j = \frac{p_j}{m}.$$

Mit diesen Überlegungen können wir jede Funktion der  $q_j$ ,  $\dot{q}_j$  und  $t$  auffassen als Funktion der  $q_j$ ,  $p_j$ ,  $t$ . Als Beispiel betrachten wir

$$H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = \sum_{i=1}^f \frac{dL}{d\dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - L.$$

Wir nennen  $H$  die *Hamiltonfunktion*. Wie wir gesehen haben, entspricht diese gerade der Gesamtenergie  $E = T + U$  und ist erhalten wenn  $L$  (und damit  $H$ ) nicht explizit von  $t$  abhängt. Auch wenn  $H = E$  eine Erhaltungsgröße ist, ist es nützlich sie nicht als Konstante sondern als Funktion der  $q_j$ ,  $p_j$  aufzufassen.

Es ist nämlich möglich, die Lagrange-Gleichungen äquivalent durch  $H$  auszudrücken. Die entsprechenden Gleichungen nennt man *Hamilton-Gleichungen*. Viele allgemeine Aussagen in der klassischen Mechanik lassen sich in diesem sogenannten *Hamilton-Formalismus* am besten zeigen. Wir wollen den Hamiltonformalismus hier nur kurz anreißen, da er ein wichtiger Ausgangspunkt zum Verständnis der Quantenmechanik ist und auch die Grundlage der klassischen statistischen Mechanik ist (beides wird in TP3 und TP4 behandelt).

Um die Hamilton-Gleichungen herzuleiten berechnen wir mit Kettenregel die Ableitung von  $H$  nach  $p_j$ .

$$\frac{dH}{dp_j} = \dot{q}_j + \sum_{i=1}^f p_i \frac{d\dot{q}_i}{dp_j} - \sum_{i=1}^f \frac{dL}{d\dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dp_j} = \dot{q}_j.$$

Als nächstes berechnen wir die Ableitung von  $H$  nach  $q_j$ . Dabei ist zu beachten dass in der Sichtweise, dass  $H$  von den  $q_i$ ,  $p_i$  und  $t$  abhängt  $q_j$  und  $p_j$  unabhängige Größen sind, so dass die Ableitung der einen Größe nach der anderen verschwindet. Wir berechnen also

$$\frac{dH}{dq_j} = \sum_{i=1}^f \underbrace{\frac{dp_i}{dq_j}}_{=0} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f p_i \frac{d\dot{q}_i}{dq_j} - \underbrace{\frac{dL}{dq_j}}_{=\dot{p}_j} - \sum_{i=1}^f \underbrace{\frac{dL}{d\dot{q}_i}}_{=p_i} \frac{d\dot{q}_i}{dq_j} = -\dot{p}_j.$$

Insgesamt finden wir also die *Hamilton-Gleichungen*

$$\frac{d}{dt}q_j = \dot{q}_j = \frac{dH}{dp_j}, \quad \frac{d}{dt}p_j = \dot{p}_j = -\frac{dH}{dq_j}.$$

**Beispiel** Für ein einzelnes freies Teilchen ist

$$H = T = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m}.$$

Die Hamilton-Gleichungen lauten

$$\dot{q}_j = \frac{dH}{dp_j} = \frac{p_j}{m}, \quad \dot{p}_j = -\frac{dH}{dq_j} = 0.$$

Die erste Gleichung sagt einfach wie Geschwindigkeit und Impuls zusammenhängen, die zweite dass der Impuls erhalten ist (da keine Kraft vorhanden ist).

Die Hamilton-Gleichungen lassen sich wie folgt umschreiben

$$\frac{d}{dt}q_j = \{q_j, H\}, \quad \frac{d}{dt}p_j = \{p_j, H\}.$$

Dabei ist  $\{\cdot, \cdot\}$  die sogenannte *Poisson-Klammer*. Für zwei Funktionen  $f_1, f_2$  die von  $q_i, p_i$  (und evtl.  $t$ ) abhängen ist diese definiert als

$$\{X_1, X_2\} = \sum_{i=1}^f \left( \frac{dX_1}{dq_i} \frac{dX_2}{dp_i} - \frac{dX_2}{dq_i} \frac{dX_1}{dp_i} \right).$$

Eine wichtige Eigenschaft der Poissonklammer ist ihre Antisymmetrie:

$$\{X_1, X_2\} = -\{X_2, X_1\}.$$

Für die  $q_j$  und  $p_j$  gilt offenbar: die Zeitableitung dieser Größen entspricht der Poisson-Klammer der Größen mit der Hamiltonfunktion. Wir wollen diese Behauptung kurz nachrechnen indem wir ausnutzen dass die  $qs$  und  $ps$  unabhängig sind und außerdem die Hamilton-Gleichungen verwenden.

$$\frac{d}{dt}q_j = \{q_j, H\} = \sum_{i=1}^f \left( \underbrace{\frac{dq_j}{dq_i}}_{=\delta_{ij}} \underbrace{\frac{dH}{dp_i}}_{=\dot{q}_i} - \underbrace{\frac{dH}{dq_i}}_{=-\dot{p}_i} \underbrace{\frac{dq_j}{dp_i}}_{=0} \right) = \sum_{i=1}^f \delta_{ij} \dot{q}_i = \dot{q}_j.$$

$$\frac{d}{dt}p_j = \{p_j, H\} = \sum_{i=1}^f \left( \underbrace{\frac{dp_j}{dq_i}}_{=0} \underbrace{\frac{dH}{dp_i}}_{=\dot{q}_i} - \underbrace{\frac{dH}{dq_i}}_{=-\dot{p}_i} \underbrace{\frac{dp_j}{dp_i}}_{=\delta_{ij}} \right) = \sum_{i=1}^f \delta_{ij} \dot{p}_i = \dot{p}_j.$$

Für die Zeitableitung einer Funktion der  $qs$  und  $ps$  gilt die Kettenregel

$$\frac{d}{dt}X(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f) = \sum_{i=1}^f \frac{dX}{dq_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \frac{dX}{dp_i} \dot{p}_i.$$

Man kann zeigen, dass für die Poisson-Klammer ebenfalls eine Kettenregel gilt. Für beliebige Funktionen  $X_1$  und  $X_2$  der  $qs$  und  $ps$  gilt

$$\{X_1, X_2\} = \sum_{i=1}^f \frac{dX_1}{dq_i} \{q_i, X_2\} + \sum_{i=1}^f \frac{dX_1}{dp_i} \{p_i, X_2\}.$$

Diese Tatsache sieht man mit einer einfachen direkten Rechnung und der tiefere Grund für diese Kettenregel ist natürlich die Tatsache, dass die Poisson-Klammer durch Ableitungen definiert ist, welche selbst eine Kettenregel erfüllen.

Aus der Kettenregeleigenschaft der Zeitableitung und der Poisson-Klammer, sowie der Tatsache dass die Zeitableitungen der  $qs$  und  $ps$  sich als Poisson-Klammern mit  $H$  schreiben lassen folgt: für jede Funktion der  $qs$  und  $ps$  (also eine Funktion die nicht explizit von  $t$  abhängt) lässt sich die Zeitableitung schreiben als Poisson-Klammer mit  $H$ .

$$\frac{d}{dt}X(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f) = \{X, H\}.$$

Die Beschreibung der klassischen Mechanik im Hamilton-Formalismus lässt sich wie folgt zusammenfassen: Der Raum der von den  $qs$  ("(kanonische) Orte") und  $ps$  ("(kanonische) Impulse") aufgespannt wird, wird *Phasenraum* genannt. Diesen Begriff haben wir bereits im Abschnitt 2.5.2 kennengelernt. Die Relevanz des Phasenraums ist, dass ein mechanischen System zu jedem Zeitpunkt durch einen Punkt im Phasenraum beschreibbar ist. Man nennt diesen Punkt im Phasenraum den *Zustand* des Systems. Funktionen auf dem Phasenraum (z.B. Ort und Impuls selbst, Energie, Drehimpuls, ...) nennt man *Messgrößen* bzw. *Observablen* eines Systems. Zu jedem Zeitpunkt haben diese einen definierten Wert – wenn die Observable eine Erhaltungsgröße

ist, dann ist dieser Wert natürlich zeitlich konstant. Bewegungen eines Systems werden durch Kurven im Phasenraum beschrieben, die den Hamilton-Gleichungen genügen. Die zeitliche Änderung einer Observablen ist gegeben durch die Poisson-Klammer mit der Hamilton-Funktion.

Im Rahmen des Hamilton-Formalismus lässt sich auch das Noether-Theorem etwas besser physikalisch verstehen. Wir betrachten eine Symmetrie im Lagrange-Formalismus, d.h. eine Symmetrie der Lagrange-Funktion. Wir transformieren die Orte  $\vec{r}(t) \mapsto \vec{r}(t, \alpha)$ . Diese Transformation ist eine Symmetrie wenn gilt  $L \mapsto L + \frac{d}{dt}X$  mit einer Funktion  $X$ . In den meisten Fällen gilt die Symmetrie-Eigenschaft separat für  $T$  und  $U$ . D.h.  $T \mapsto T + \frac{d}{dt}X_T$ ,  $U \mapsto U + \frac{d}{dt}X_U$ ,  $X = X_T - X_U$ . Dann gilt die Symmetrie-Eigenschaft aber auch für die Hamilton-Funktion  $H = T + U$ ,  $H \mapsto H + \frac{d}{dt}(X_T + X_U)$ . Wir können also analog zum Lagrange-Formalismus im Hamilton-Formalismus definieren wann eine kontinuierliche Transformation eine Symmetrie ist.

Man kann nun Folgendes zeigen und begründen (die Herleitung / Begründung muss hier leider entfallen): man betrachte eine kontinuierliche Transformation mit Parameter  $\alpha$ . Eine Funktion  $X$  auf dem Phasenraum – also eine Observable – transformiert sich dann zu  $X \mapsto X'$ . Man kann zeigen:

$$\frac{d}{d\alpha}X' = \{X', Q\}$$

wobei  $Q$  die Erhaltungsgröße aus dem Noether-Theorem ist. Analog zu der Tatsache, dass sich Zeitableitungen von Observablen als Poisson-Klammer mit  $H$  schreiben lassen, lassen sich also  $\alpha$ -Ableitungen als Poisson-Klammer mit  $Q$  schreiben. Man spricht davon, dass  $Q$  die *Erzeugende* der kontinuierlichen Transformation mit  $\alpha$  ist. (Als eine Analogie kann man sich den Zinssatz bei der Bank als eine *Erzeugende* der Geldvermehrung durch Zins und Zinseszins vorstellen.) Im Fall dass die betrachtete kontinuierliche Transformation bzw. Symmetrie gerade die Zeittranslation ist, ist die Erhaltungsgröße die Hamilton-Funktion  $H$  selbst, die also als *Erzeugende* der Zeittranslationen aufgefasst werden kann. Warum ist  $Q$  nun eine Erhaltungs-Größe? Nehmen wir den einfachen Fall, dass die Symmetrie derart ist, dass die kontinuierliche Transformation  $H$  invariant lässt, also  $H$  in sich selbst überführt  $H \mapsto H' = H$ . Es gilt dann

$$0 = \frac{d}{d\alpha}H' = \{H', Q\} = \{H, Q\} = -\{Q, H\} = -\frac{d}{dt}Q.$$

## 4 Schwingungstilgung

Wir haben bereits den Fall einer erzwungenen gedämpften Schwingung in einer Dimension diskutiert. Offenbar lassen sich unerwünschte Schwingungen beseitigen indem man geeignete Dämpfungen einsetzt. Eine andere Möglichkeit die wir hier diskutieren wollen ist die *Schwingungstilgung*. Dabei wird eine Schwingung durch eine geeignete Gegenschwingung "neutralisiert". Dieses Phänomen hätten wir im Prinzip auch im Rahmen der Newton'schen Mechanik diskutieren können. Allerdings können wir jetzt mit Kenntnis des Lagrange-Formalismus einige zusätzliche Bemerkungen dazu machen.

Wir wiederholen zunächst den Fall einer erzwungenen gedämpften Schwingung in einer Dimension. Die Newton'sche Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + kx = f_0 \cos(\omega t) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Dabei ist  $\rho > 0$  die Dämpfungskonstante,  $k > 0$  die Federkonstante,  $\omega$  die Frequenz der antreibenden Kraft und  $f_0$  ihre Amplitude.  $\omega_0$  ist die Eigenfrequenz des schwingenden Systems. Wie besprochen ist die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Gleichung mit  $f_0 \neq 0$  gegeben durch die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung mit  $f_0 = 0$  und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Für kleine Dämpfungen  $\rho^2 < \omega_0^2 m^2$  finden wir

$$x(t) = x_H(t) + x_I(t)$$

$$x_H(t) = e^{-\frac{\rho}{m}t} (A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)), \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2/m^2},$$

$$x_I(t) = C \cos(\omega t + \varphi), \quad C = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\rho^2\omega^2/m^2}}, \quad \tan(\varphi) = -\frac{2\rho\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Der Anteil  $x_H(t)$  lässt sich dabei interpretieren als die Eigenschwingung des Systems. Diese wird durch die Reibungskraft derart gedämpft, dass die Amplitude mit der Zeit exponentiell abnimmt und die Eigenschwingung somit für  $t \gg m/\rho$  effektiv abstirbt. Außerdem wird die Eigenfrequenz des Systems durch die Dämpfung verringert, es schwingt also langsamer.

Der Anteil  $x_I(t)$  dagegen entspricht der durch die äußere Kraft aufgezwungene Schwingung. Die Frequenz dieser erzwungenen Schwingung entspricht exakt der Frequenz der äußeren Kraft. Trotz Dämpfung bleibt die Amplitude der erzwungenen Schwingung konstant, da sie durch die äußere Kraft aufrechterhalten wird. Für  $t \gg m/\rho$  ist das also der einzig relevante Beitrag zur Lösung  $x(t)$ . Nichtsdestotrotz hat die Dämpfung auch einen Einfluss auf die erzwungene Schwingung. Die Amplitude dieser Schwingung wird durch die Dämpfung reduziert, so dass die sogenannte Resonanzkatastrophe - die Tatsache, dass die Amplitude  $C$  für  $\rho = 0$  unendlich groß wird wenn  $\omega = \omega_0$ , d.h. wenn Antriebs- und Eigenfrequenz gleich sind - vermieden wird. Außerdem wird die erzwungene Schwingung gegenüber der antreibenden Schwingung Phasenverschoben mit einer Phase  $\varphi \neq 0$ , sie läuft also "nach". Die Phasenverschiebung ist am größten im Resonanzfall  $\omega = \omega_0$  und beträgt dort  $\varphi = \pi/2 = 90^\circ$  ( $\tan(\pi/2) = \infty$ ). D.h. im Resonanzfall hat die

erzwungene Schwingung einen Nulldurchgang wenn die äußere Schwingung einen Maximalaus-  
schlag hat und umgekehrt.

Wir wollen nun zunächst untersuchen, wie eine mögliche Lagrange-Funktion für dieses Pro-  
blem aussieht. Für den Fall  $\rho = 0$  lautet diese

$$L = T - U, \quad T = \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad U = \frac{k}{2} x^2 - f_0 \cos(\omega t) x.$$

$U$  und damit  $L$  hängt explizit von der Zeit ab, daher ist die Energie nicht erhalten - es wird  
dem System durch die äußere Kraft ständig Energie zugeführt. Diese wird dazu verwendet die  
erzwungene Schwingung aufrechtzuerhalten.

Wir könnte  $L$  bzw.  $U$  für  $\rho > 0$  aussehen? Ein möglicher Beitrag für  $U$  wäre

$$U_\rho = -\rho \dot{x} x, \quad -\frac{dU_\rho}{dx} = \rho \dot{x}.$$

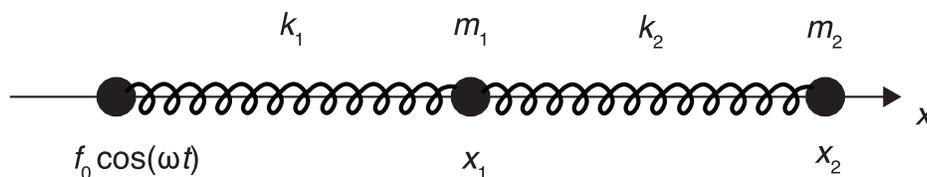
Ein solcher Beitrag würde allerdings auch zum 1. Term der Lagrange-Gleichung beitragen.

$$\frac{d}{dt} \frac{dU_\rho}{d\dot{x}} = \frac{d}{dt} \rho = \rho = -\rho \dot{x}.$$

Für diesen Term müssten wir also das andere Vorzeichen wählen, bzw. wir sehen dass so ein  
Beitrag zu  $U$  aus den Lagrange-Gleichungen verschwindet. Das liegt daran, dass

$$\rho \dot{x} x = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \rho x^2.$$

Dieser Beitrag ist also die Zeitableitung einer Funktion, und wir hatten bereits im Rahmen der  
Symmetrien diskutiert dass ein Beitrag zu  $L$  von dieser Form keinen Einfluss auf die Lagrange-  
Gleichungen hat. Tatsächlich ist es so, dass es nicht möglich ist, einen Beitrag zu  $U$  anzugeben,  
der in den Lagrange-Gleichungen die Reibungskraft reproduziert. Um solche Kräfte im Lagrange-  
Formalismus zu behandeln, muss dieser erweitert werden. Darauf wollen wir aber in der Vorle-  
sung nicht weiter eingehen. Stattdessen behandeln wir das Phänomen der Schwingungstilgung  
mit den altbekannten Newton'schen Methoden.



Dazu betrachten wir das obige Modellsystem aus drei Massenpunkten die sich entlang der  
 $x$ -Achse bewegen können. Der Massenpunkt ganz links schwingt um den Ursprung und ist der

Ursprung der antreibenden Kraft. Der mittlere Massenpunkt mit Masse  $m_1$  ist mit einer Feder mit Federkonstante  $k_1$  mit dem linken Massenpunkt verbunden. Der dritte Massenpunkt ganz rechts hat die Masse  $m_2$  und ist mit dem mittleren mit einer Feder mit Federkonstante  $k_2$  verbunden. Wir stellen uns vor dass die beiden rechten Massenpunkte durch Reibung an der Luft Reibungskräfte mit Dämpfungskonstanten  $\rho_1$  und  $\rho_2$  erfahren. Die Newton'schen Bewegungsgleichungen lauten

$$m_1 \ddot{x}_1 = F_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) - 2\rho_1 \dot{x}_1 + f_0 \cos(\omega t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = F_2 = -k_2(x_2 - x_1) - 2\rho_2 \dot{x}_2$$

Dabei ist

$$f_0 = k_1 A_0$$

mit  $A_0$  der Amplitude der Schwingung des linken Massenpunktes. Wie im einfachen Fall ist die allgemeine Lösung dieses inhomogenen Systems von der Form

$$x_1(t) = x_{1,H}(t) + x_{1,I}(t), \quad x_2(t) = x_{2,H}(t) + x_{2,I}(t).$$

Dabei sind  $x_{1,H}(t)$ ,  $x_{2,H}(t)$  die allgemeinen Lösungen des homogenen Problems mit  $f_0 = 0$ , d.h. die Eigenschwingungen des Systems. Und  $x_{1,I}(t)$ ,  $x_{2,I}(t)$  sind spezielle Lösungen des Systems mit  $f_0 \neq 0$ , die wir wie im einfachen Fall am sinnvollsten als reine erzwungene Schwingung ohne Eigenschwingungsanteil wählen.

Wir wollen an dieser Stelle nicht die allgemeine Form von  $x_{1,H}(t)$ ,  $x_{2,H}(t)$  diskutieren, da wir erwarten, dass dieser Beitrag für  $t$  größer als  $m_1/\rho_1$  und  $m_2/\rho_2$  keine Rolle spielt und es bei Schwingungstilgung in diesem Beispiel darum geht, die Wirkung der antreibenden Schwingung auf den mittleren Massenpunkt durch die Schwingung des rechten Massenpunktes zu neutralisieren.

Wir suchen also nach speziellen Lösungen  $x_{1,I}(t)$ ,  $x_{2,I}(t)$  die reine erzwungene Schwingungen sind. Wir betrachten zunächst den Fall verschwindender Dämpfungen  $\rho_1 = \rho_2 = 0$ . Wir machen den Ansatz

$$x_{1,I}(t) = A_1 \cos(\omega t), \quad x_{2,I}(t) = A_2 \cos(\omega t).$$

(Wir erlauben also, dass beide Massenpunkte sich und den Ursprung "durchdringen koennen".) Einsetzen des Ansatzes in die Gleichungen führt zu

$$-m_1 \omega^2 A_1 = -k_1 A_1 + k_2(A_2 - A_1) + k_1 A_0, \quad -m_2 \omega^2 A_2 = -k_2(A_2 - A_1).$$

Die zweite Gleichung können wir schreiben als

$$-(\omega^2 - \omega_2^2)A_2 = \omega_2^2 A_1 \quad \Leftrightarrow \quad A_2 = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega^2} A_1, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}.$$

Einsetzen dieses Ergebnisses für  $A_2$  in die erste Gleichung führt zu

$$-m_1 \omega^2 A_1 = -k_1 A_1 + k_2 \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega^2} A_1 + k_1 A_0$$

$$\Leftrightarrow A_1 = A_0 \frac{\omega_1^2(\omega_2^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - \omega_{12}^2 \omega^2}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_{12} = \sqrt{\frac{k_2}{m_1}}$$

Einsetzen in die Gleichung für  $A_2$  liefert

$$A_2 = A_0 \frac{\omega_1^2 \omega^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - \omega_{12}^2 \omega^2}$$

An diesem Ergebnis sehen wir: wenn  $\omega_2 = \omega$ , wenn also der zweite Massenpunkt in Resonanz schwingt, dann ist  $A_1 = 0$  und der mittlere Massenpunkt steht still! Das können wir leicht verstehen. In diesem Fall ist nämlich

$$A_2 = -A_0 \frac{\omega_1^2}{\omega_{12}^2} = -A_0 \frac{k_1}{k_2},$$

d.h. der rechte Massenpunkt und der linke schwingen gegenphasig. Wenn der eine nach links schwingt, dann schwingt der andere nach rechts und umgekehrt. Da die Amplituden im richtigen Verhältnis stehen verschwindet die resultierende Kraft auf den mittleren Massenpunkt. Das Ergebnis bleibt qualitativ richtig, wenn man Dämpfung berücksichtigt. Allerdings ist mit Dämpfung in der Regel keine perfekte Schwingungstilgung möglich, d.h. man kann  $A_1$  nicht zum Verschwinden bringen sondern nur sehr klein im Vergleich zu  $A_0$  machen.

Das Prinzip der Schwingungstilgung ist z.B. im Hochhaus "Taipeh 101" realisiert, das in Taipeh steht und 101 Stockwerke hoch ist. Im Hochhaus ist ein Pendel mit Pendelarmlänge von 42m und Pendelmasse von 660 Tonnen (!! ) aufgehängt. Im 88. Stock ist ein vornehmes Restaurant in dessen Mitte die Pendelmasse, eine vergoldete Kugel von 5.5m Durchmesser, zu sehen ist. Bis jetzt kam sie noch nicht zum Einsatz ... .

## 5 Starre Körper

Bislang haben wir Systeme von Massenpunkten behandelt, die sich im Prinzip unabhängig voneinander bewegen konnten. Wir wollen nun die Dynamik starrer Körper diskutieren. Starre Körper kann man sich vorstellen als ein System von  $N$  Massenpunkten, wobei zwischen jedem Paar von zwei Massenpunkten Zwangskräfte  $\vec{Z}_{ij}$  herrschen die dazu führen dass  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  konstant bleibt. In einem weiteren Schritt lässt man die Anzahl  $N$  der Massenpunkte im starren Körper gegen unendlich gehen wobei die Gesamtmasse  $M$  endlich bleibt. In dieser Art und Weise lassen sich kontinuierliche starre Körper verstehen, mit denen wir es in der Regel im Alltag zu tun haben.

### 5.1 Die Freiheitsgrade eines starren Körpers

Um die Gesamtheit der möglichen Lagen eines starren Körpers zu verstehen betrachten wir ein *körperfestes Koordinatensystem*  $(O_K, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ . Wir wählen einen Punkt  $O_K$  innerhalb des

Körpers. In der Regel wird das der Schwerpunkt sein, aber diese Einschränkungen wollen wir zunächst nicht machen. Der Ortsvektor dieses Punktes in einem *raumfesten Inertialsystem*  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sei (wir wählen den gleichen Zeitnullpunkt für beide Systeme darum erwähnen wir die Zeitkoordinate nicht explizit)

$$\vec{R}_K = \overrightarrow{OO_K}.$$

Es sei nun  $P$  ein beliebiger Punkt im Körper. Wir können diesen beschreiben durch den Vektor

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO_K} + \overrightarrow{O_K P} = \vec{R}_K + \vec{y}, \quad \vec{y} = \overrightarrow{O_K P}.$$

$\vec{r}$  ist dabei der Ortsvektor im raumfesten System und  $\vec{y}$  der Ortsvektor im körperfesten System. Wir können  $\vec{y}$  schreiben als

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^3 y_i \vec{e}'_i.$$

Da das körperfeste System  $(O_K, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  per Definition jede Bewegung des Körpers mitmacht, gilt

$$\dot{y}_i = 0.$$

Es gilt aber in der Regel nicht

$$\dot{\vec{y}} = \vec{0},$$

der Punkt  $P$  kann sich ja relativ zum Punkt  $O_K$  bewegen, z.B. wenn sich der Körper um eine Achse durch  $O_K$  dreht. Mit anderen Worten,  $\dot{\vec{y}} \neq \vec{0}$  weil die körperfeste Basis in der Regel nicht zeitlich konstant bezüglich des raumfesten Systems ist. Da nach Definition sowohl die körperfeste  $\vec{e}'_i$  als auch die raumfeste Basis  $\vec{e}_i$  ein Rechtssystem bilden lassen sie sich durch eine Drehung ineinander überführen.

Eine allgemeine Drehung lässt sich durch die drei *Euler'schen Winkel* parametrisieren, d.h. in drei einzelne Drehungen zerlegen. Man dreht erst das System  $\vec{e}_i$  um die  $\vec{e}_3$ -Achse mit Winkel  $0 \leq \phi < 2\pi$ . Man hat dann

$$\vec{e}_1 \mapsto \vec{e}''_1, \quad \vec{e}_2 \mapsto \vec{e}''_2, \quad \vec{e}_3 \mapsto \vec{e}''_3 = \vec{e}_3.$$

Anschließend dreht man das System  $\vec{e}''_i$  um die  $\vec{e}''_1$ -Achse mit Winkel  $0 \leq \theta < \pi$

$$\vec{e}''_1 \mapsto \vec{e}'''_1 = \vec{e}''_1, \quad \vec{e}''_2 \mapsto \vec{e}'''_2, \quad \vec{e}''_3 \mapsto \vec{e}'''_3.$$

Schließlich dreht man das System  $\vec{e}'''_i$  um die  $\vec{e}'''_3$ -Achse mit Winkel  $0 \leq \psi < 2\pi$ .

$$\vec{e}'''_1 \mapsto \vec{e}'_1, \quad \vec{e}'''_2 \mapsto \vec{e}'_2, \quad \vec{e}'''_3 \mapsto \vec{e}'_3 = \vec{e}'''_3.$$

Wichtig ist hierbei die Möglichkeit der Zerlegung einer allgemeinen Drehung in drei einzelne Drehungen. Natürlich kann man sich viele andere mögliche Zerlegungen in drei Drehungen überlegen.

Wir stellen also fest: um die Lage eines beliebigen Punktes im starren Körper in einem bezüglich eines raumfesten Inertialsystems anzugeben und damit die Lage des starren Körper selbst, ist es ausreichend, zu jedem Zeitpunkt sechs Zahlen zu kennen:

1. die drei Komponenten von  $\vec{R}_K$ , die die Lage des körperfesten Bezugspunktes im raumfesten System angeben,
2. die drei Euler'schen Winkel, die die Ausrichtung der körperfesten Koordinatenachsen in Relation zu den raumfesten Koordinatenachsen angeben.

Ein starren Körper hat also  $f = 6$  Freiheitsgrade, drei Translationsfreiheitsgrade und drei Rotationsfreiheitsgrade.

## 5.2 Die Trägheitsmomente und die kinetische Energie eines starren Körpers

Wir wollen nun die kinetische Energie eines starren Körpers berechnen. Wie bereits im Rahmen rotierender Bezugssysteme besprochen gilt: es gibt einen Vektor  $\vec{\Omega}$ , so dass für die körperfeste Basis gilt

$$\dot{\vec{e}}'_i = \vec{\Omega} \times \vec{e}'_i.$$

Dieser Vektor lässt sich interpretieren als Winkelgeschwindigkeitsvektor, d.h. die momentane Rotation erfolgt um eine Achse parallel zu  $\vec{\Omega}$  und mit Winkelgeschwindigkeit  $\Omega = |\vec{\Omega}|$ .

Wir betrachten nun zunächst einen starren Körper der aus  $N$  einzelnen Massenpunkten besteht. Die Lage jedes dieser Punkte lässt sich beschreiben durch

$$\vec{r}_i = \vec{R}_K + \vec{y}_i = \vec{R}_K + \sum_{j=1}^3 y_{i,j} \vec{e}'_j$$

wobei

$$\dot{y}_{i,j} = 0.$$

Es gilt also

$$\dot{\vec{y}}_i = \vec{\Omega} \times \vec{y}_i \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}}_K + \vec{\Omega} \times \vec{y}_i.$$

Für die kinetische Energie folgt daraus

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}_K^2 + \dot{\vec{R}}_K \cdot \left( \vec{\Omega} \times \sum_{i=1}^N m_i \vec{y}_i \right) + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{y}_i)^2.$$

mit der Gesamtmasse  $M = \sum_{i=1}^N m_i$ . Wir wählen nun  $O_K$  als Schwerpunkt des starren Körpers, d.h.

$$\vec{R}_K = \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i.$$

Dann gilt - wie bereits diskutiert -

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{y}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) = M \vec{R} - M \vec{R} = \vec{0},$$

d.h. der mittlere Term in der Berechnung der kinetischen Energie verschwindet:

$$T = \frac{M}{2} \dot{R}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{y}_i)^2.$$

Den letzten Term können wir mit der Spat-Produkt- und der BAC-CAB-Regel berechnen. Es gilt

$$(\vec{\Omega} \times \vec{y}_i) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{y}_i) = \vec{\Omega} \cdot (\vec{y}_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{y}_i)) = \vec{\Omega} \cdot (\vec{\Omega} \vec{y}_i^2 - \vec{y}_i (\vec{\Omega} \cdot \vec{y}_i)) = \vec{\Omega}^2 \vec{y}_i^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{y}_i)^2.$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{y}_i)^2 &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\vec{\Omega}^2 \vec{y}_i^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{y}_i)^2) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\delta_{jk} \vec{y}_i^2 - y_{i,j} y_{i,k}) \Omega_j \Omega_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 I_{jk} \Omega_j \Omega_k = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot (I \vec{\Omega}) \end{aligned}$$

mit

$$I_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{jk} \vec{y}_i^2 - y_{i,j} y_{i,k}), \quad I = \sum_{i=1}^N m_i \left( \vec{y}_i^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{i,1}^2 & y_{i,1} y_{i,2} & y_{i,1} y_{i,3} \\ y_{i,2} y_{i,1} & y_{i,2}^2 & y_{i,2} y_{i,3} \\ y_{i,3} y_{i,1} & y_{i,3} y_{i,2} & y_{i,3}^2 \end{pmatrix} \right).$$

$I$  ist also eine symmetrische Matrix mit Komponenten  $I_{jk}$ . Wir nennen  $I$  den *Trägheitstensor* des starren Körpers. Der Begriff "Tensor" ist in diesem Zusammenhang gleichbedeutend mit "Matrix".

Im Fall eines kontinuierlichen starren Körpers müssen wir die Summe über die einzelnen Massenpunkte durch ein Integral ersetzen

$$\sum_{i=1}^N m_i \quad \rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \rho(\vec{y}),$$

dabei ist  $\rho$  die Massendichte des Körpers. Wir werden in Kürze Beispiele rechnen.

Insgesamt sehen wir also, dass die kinetische Energie eines starren Körpers zwei Beiträge hat.

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}, \quad T_{\text{trans}} = \frac{M}{2} \dot{R}^2, \quad T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot (I \vec{\Omega}).$$

Diese Beiträge entsprechen der kinetischen Energie der Translation und der kinetischen Energie der Rotation.

Die Berechnung der kinetischen Rotationsenergie ist für die Praxis in der gefundenen Form ungeeignet und kann in vielen Fällen deutlich vereinfacht werden. Ausgangspunkt dafür ist die

Tatsache, dass die Matrix  $I$  symmetrisch ist. Außerdem gilt: die oben angegebenen Matrixelemente  $I_{jk}$  der Matrix  $I$  lassen sich berechnen aus

$$I_{jk} = \vec{e}'_j \cdot (I\vec{e}'_k),$$

sie hängen also von der gewählten körperfesten Basis ab (da die Komponenten  $y_j$  von  $\vec{y}$  von dieser Basis abhängen). Die Frage ist nun, ob es eine bestimmte Wahl der körperfesten Basis  $\vec{e}'_j$  gibt, in der die Matrix  $I$  eine besonders einfache Form hat. Aus der Mathematik (linearen Algebra) ist folgende Tatsache bekannt.

Für jede symmetrische Matrix  $I$  existiert eine Orthonormalbasis  $\vec{e}'_j$  bezüglich derer die Matrix Diagonalform hat, d.h.

$$I_{jk} = \vec{e}'_j \cdot (I\vec{e}'_k) = I_j \delta_{jk}$$

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Die drei Vektoren  $\vec{e}'_j$  sind dabei gerade die *Eigenvektoren* der Matrix und die  $I_j$  die dazugehörigen *Eigenwerte*, d.h. es gilt

$$I\vec{e}'_j = I_j \vec{e}'_j.$$

Wir wollen im folgenden immer diese spezielle körperfeste Basis wählen. Die entsprechenden Koordinatenachsen nennt man *Hauptträgheitsachsen* und die dazugehörigen Diagonaleinträge von  $I$  *Hauptträgheitsmomente* (oder einfach *Trägheitsmomente*).

Die Hauptträgheitsachsen sind ausgezeichnete Drehachsen des starren Körpers. Man kann zeigen: die Drehung um die zum größten und niedrigsten Hauptträgheitsmoment gehörigen Hauptträgheitsachsen ist besonders stabil gegen Störungen. Die Drehung um jede andere Achse (inkl. der Hauptträgheitsachse für das mittlere Hauptträgheitsmoment) ist dagegen relativ instabil gegen Störungen. Fallen zwei (oder drei) Hauptträgheitsmomente betragsmässig zusammen, dann gibt es in diesem Sinne kein "mittleres" Hauptträgheitsmoment und die Drehung um alle drei Hauptträgheitsachsen ist besonders stabil.

Wir können die kinetische Rotationsenergie also vereinfacht ausdrücken als

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \Omega_i^2$$

### 5.3 Berechnung von Hauptträgheitsmomenten

Es gibt ein allgemeines mathematisches Verfahren zur Bestimmung der Hauptträgheitsachsen und -momente. Man muss einfach die Eigenvektoren und Eigenwerte des Trägheitstensors bestimmen. Oft kann man die Hauptträgheitsachsen aber leicht "raten". Zunächst einmal gehen natürlich alle Hauptträgheitsachsen durch den Schwerpunkt des Körpers, schneiden sich also dort. Es leuchtet ein, dass Symmetrieachsen eines symmetrischen starren Körpers immer Hauptträgheitsachsen sind. Diese Tatsache lässt sich auch nicht allzu schwer mathematisch beweisen, wir wollen uns aber an dieser Stelle mit der physikalischen Intuition und einigen Beispielen zufrieden geben.

**Beispiel: 2 Massenpunkte** Wir betrachten einen starren Körper der aus zwei Massenpunkten an den Orten

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Schwerpunkt ist

$$\vec{R} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_1 x_{1,1} + m_2 x_{2,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen als körperfestes Koordinatensystem einfach die kartesischen Koordinatenachsen mit Ursprung im Schwerpunkt. Es ist also

$$\vec{y}_1 = \vec{r}_1 - \vec{R} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} x_{1,1} - x_{2,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \vec{r}_2 - \vec{R} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} x_{2,1} - x_{1,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Offenbar sind wegen der Symmetrie alle drei Koordinatenachsen Hauptträgheitsachsen. Die Hauptträgheitsmomente sind

$$I_1 = m_1 \underbrace{(\vec{y}_1^2 - y_{1,1}^2)}_{=0} + m_2 \underbrace{(\vec{y}_2^2 - y_{2,1}^2)}_{=0} = 0$$

$$I_2 = m_1(\vec{y}_1^2 - y_{2,2}^2) + m_2(\vec{y}_2^2 - y_{2,2}^2) = m_1 \vec{y}_1^2 + m_2 \vec{y}_2^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (x_{2,1} - x_{1,1})^2 = \mu (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = I_3.$$

**Beispiel: Kugel** Wir betrachten eine Kugel mit Radius  $r_0$ , Masse  $M$  und konstanter Massendichte

$$\rho(\vec{y}) = \begin{cases} \frac{M}{V} & |\vec{y}| \leq r_0 \\ 0 & |\vec{y}| > r_0 \end{cases}, \quad V = \frac{4}{3}\pi r_0^3.$$

Offenbar ist jede Achse durch den Mittelpunkt der Kugel eine Hauptträgheitsachse und das Hauptträgheitsmoment bezüglich jeder dieser Achsen ist gleich groß. Wenn wir ein körperfestes kartesisches Koordinatensystem wählen gilt also

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{3} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \int d^3y \rho(\vec{y})(\vec{y}^2 - y_j^2) = \frac{2}{3} \int d^3y \rho(\vec{y})\vec{y}^2.$$

Wir wählen nun Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$ . In diesen gilt für die Integration (bzw. das Volumenelement)

$$\int d^3y = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} dr d\theta d\phi \sin(\theta) r^2.$$

Es ist dann

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{3} \frac{M}{V} \int_0^{r_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} dr d\theta d\phi \sin(\theta) r^4 = \frac{2}{3} 4\pi \frac{M}{V} \int_0^{r_0} dr r^4 = \frac{2}{3} 4\pi \frac{M}{V} \frac{1}{5} r_0^5 = \frac{2}{5} M r_0^2.$$

Dabei haben wir ausgenutzt dass das Integral über die Winkel gerade  $4\pi$ , d.h. die Oberfläche einer Kugel mit Radius 1 gibt. Die kinetische Energie einer Kugel die entlang der  $x_1$ -Achse in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene rollt ist also

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}, \quad T_{\text{trans}} = \frac{M}{2} \dot{R}_1^2, \quad T_{\text{rot}} = \frac{M}{5} r_0^2 \dot{\phi}^2$$

wobei  $\phi$  der Drehwinkel um die körperfeste  $x_2$ -Achse ist.

## 5.4 Bewegungsgleichungen eines starren Körpers

Wir wollen nun die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers herleiten. Wir betrachten dazu zunächst einen starren Körper aus  $N$  Massenpunkten. Auf jeden Massenpunkt wirkt die Kraft

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{Z}_i, \quad \vec{Z}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{Z}_{ij}, \quad \vec{Z}_{ij} = -\vec{Z}_{ji}.$$

Die Zwangskräfte  $\vec{Z}_{ji}$  halten wie besprochen die Abstände der Massenpunkte konstant und genügen dem dritten Newton'schen Gesetz. Daraus folgt analog zur Diskussion mehrerer "nicht-starrer" Punktteilchen und unter der Annahme konstanter Massen.

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{Z}_i) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{Z}_{ij} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{F}^{\text{ext}}$$

Diese Bewegungsgleichung beschreibt also die *Translationsbewegung* des starren Körpers. Wir benötigen also noch eine Gleichung für die *Rotationsbewegung* um eine vollständige Beschreibung zu erhalten.

Dazu betrachten wir die Ableitung des Gesamtdrehimpulses, wieder analog zur Diskussion von mehreren "nicht-starren" Massenpunkten

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Die Zwangskräfte erfüllen nicht nur

$$\vec{Z}_{ij} = -\vec{Z}_{ji}$$

sondern auch

$$\vec{Z}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j.$$

Wie besprochen impliziert das, dass die Zwangskräfte zum Gesamtdrehmoment nicht beitragen. Es gilt also

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{N} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

Das ist die Bewegungsgleichung für die Rotationsfreiheitsgrade.

Im Falle eines kontinuierlichen starren Körpers muss man die Summen über die Teilchen durch Integrale über die Massendichte ersetzen, ansonsten behalten die Gleichungen ihre Gültigkeit.

Wenn die äußeren Kräfte alle konservativ sind mit gemeinsamem Potential  $U$

$$\vec{F}_i^{\text{ext}} = -\vec{\nabla}_i U$$

dann kann man die Lagrangefunktion  $L = T - U$  aufstellen und die Bewegungsgleichungen für Translation und Rotation daraus ableiten. Wie für mehrere nicht-starre Punktteilchen ist das oft die effizienteste Methode die relevanten Bewegungsgleichungen herzuleiten.