Universität Leipzig
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Ulrich Behn

Seminar zur klassischen Physik

Studentische Tutoren:
Philipp Altrock, André Jäschke

Hamiltonsche Mechanik in symplektischer Form

Bei genauerer Untersuchung der Kanonizität der Phasenraumvariablen eines Hamiltonschen Systems fällt schnell auf, dass diese Struktur von einer gewissen Klasse von Transformationen invariant gelassen wird. Diese Transformationen werden als symplektisch bezeichnet und entsprechen den kanonischen. In mathematisch strengerer Form ausgedrückt, bedeutet dies, dass der Kotangentialraum (der dem Phasenraum des mechanischen Systems entspricht) des Konfigurationsraums als differenzierbare Mannigfaltigkeit, selbst eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und in natürlicher Weise eine symplektische Struktur trägt, wobei diese invariant unter dem Hamiltonschen Phasenfluss ist.
Ziel dieses Vortrags soll eine Einführung in diese Zusammenhänge sein. Wir schlagen vor, zur Motivation zunächst die symplektische Struktur der Hamiltongleichung und ihre Invarianz unter kanonischen Transformationen zu zeigen. Danach soll eine Formulierung der Mechanik auf symplektischen Mannigfaltigkeiten stattfinden, der eine kurze Wiederholung von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten vorangehen könnte. Zuletzt sollen Folgerungen auf der Basis dieser Formulierung vorgestellt werden, das könnten z.B. ein Beweis des Satzes von Liouville oder der Energieerhaltung abgeschlossener Systeme sein.
Fairerweise müssen wir anmerken, dass dieses Thema mathematisch sehr aufwendig werden kann. Es empfiehlt sich deshalb für mathematisch orientierte Studenten mit gefestigten Grundlagen im Differentialformenkalkül und in der Analysis auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Die vortragenden Studenten sollen dazu ermutigt werden, das Abstraktionsniveau für dieses Thema selbst zu bestimmen.

Literatur

[1] V.I. Arnold, Mathematische Methoden der klassischen Mechanik, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin 1988

[2] Gerd Rudolph, Vorlesungen zur mathematischen Physik, Teil 1: Mannigfaltigkeiten, Tensorfelder und Hamiltonsche Systeme, ITP Universität Leipzig