Prof. Dr. R. Verch
Dr. Ko Sanders

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Sommersemester 2014

Übungen zu TP2-Elektrodynamik (Staatsexamen Lehramt)
Große Hausaufgabe

Das Erreichen von 50% (entsprechend 20 Punkten) der Punkte der Großen Hausaufgabe ist erforderlich für die Zulassung zur Klausur (Modulprüfung). Die Abgabefrist für die Bearbeitungen endet am Dienstag, 24.06.2014, zu Beginn des Übungsseminars.

A - Fragen zum Inhalt der Vorlesung (und der Übungen). Beantworten Sie die folgenden Fragen knapp aber möglichst treffend. Verwenden Sie Formeln und Skizzen. Erklären Sie die Bedeutung der Formelsymbole. Die Antwort einer Frage soll nicht mehr als eine Seite in Anspruch nehmen. Wenn Beweise von Sachverhalten erbracht werden sollen, so wird dies in der Frage betont.
Der Wert jeder Frage beträgt 4 Punkte.

(A.1) Erläutern Sie das Gaußsche Gesetz der Elektrostatik in integraler und differentieller Form. Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen beiden Formen des Gaußschen Gesetzes?

(A.2) Erläutern Sie das Ampèresche Gesetz der Magnetostatik.

(A.3) Was wird unter einem Vektorpotential für ein Vektorfeld verstanden? Unter welchen Bedingungen hat ein Vektorfeld ein Vektorpotential? Für welches Feld der in der Elektrodynamik ergibt sich die Existenz eines Vektorpotentials?

(A.4) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen elektrischem Widerstand und Stromdichte für einen elektrisch leitenden "dicken Draht", der von einer stationären Stromdichte $\vec{j}$ durchflossen wird.

/...2

B - zu lösende Aufgaben

Lösen Sie zwei der folgenden 4 Aufgaben. Wenn Sie mehr als 2 Aufgaben bearbeiten, werden nur die besten 2 Bearbeitungen für die Gesamtpunktzahl gezählt.

(B.1) [12 Punkte]

Eine statische Ladungsverteilung $\varrho(\vec{x})$ sei gegeben durch:

$$\varrho(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} q x_3\,, & \text{falls } 0 \le x_3 \le a \text{ und } x_1^2 + x_2^2 \le R^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei sind a und R positive reelle Konstanten der Dimension einer Länge, und q ist eine reelle Konstante der Dimension einer Ladung pro (Länge)^4 (in MKSA-Einheiten).

(a) Berechnen Sie die Gesamtladung Q der Ladungsverteilung (in Abhängigkeit von a, R und q).

(b) Berechnen Sie das von der Ladungsverteilung hervorgerufene elektrische Feld am Ort

$$\vec{x}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, \quad r > R$$

in Abhängigkeit von a, R, q und r.

(B.2) [12 Punkte]

Es sei $\mathcal{V}$ das Volumen, das gebildet wird durch den $\{x_3 > 0\}$-Teil der Kugel mit dem Radius R, die im Koordinatenursprung zentriert ist. Es sei außerdem das Vektorfeld

$$\vec{g}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0 x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben (dabei ist g_0 eine positive Konstante).

Weisen Sie für diese Situation die Gültigkeit des Satzes von Gauß nach, indem Sie jeweils

$$\int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \bullet \vec{g})(\vec{x})\, d^3x \qquad \text{und} \qquad \int_{\partial V} (\vec{g}(y) \bullet \vec{n}_O(y))\, d\sigma(y)$$

berechnen und zeigen, dass beide Ausdrücke dasselbe Ergebnis liefern.

/...3

(B.3) [12 Punkte]

Es sei $\varphi(\vec{x})$ das Potential einer elektrostatischen Ladungsverteilung im Raum. Eine Fläche der Art

$$S_{\varphi_0} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \varphi(\vec{x}) = \varphi_0\}$$

wird als **Äquipotentialfläche** für das Potential bezeichnet, also als eine Fläche, auf der der Wert des Potentials konstant ist (überall auf der Fläche hat das Potential den gleichen Wert φ_0). Als **Feldlinien** werden gerichtete Kurven bezeichnet, die an positiven Ladungen beginnen und an negativen Ladungen enden und deren Tangentialvektoren senkrecht auf den Äquipotentialflächen stehen.

(a) Feldlinien verlaufen parallel zum elektrischen Feld. Erklären Sie, warum.

(b) Das elektrische Feld $\vec{E}$ einer Ladungsverteilung kann mit Hilfe von Feldlinien dargestellt werden, indem man die Feldlinien bei größerem $||\vec{E}\,||$ dichter zeichnet, d.h. man setzt die Zahl der Linien pro Flächeneinheit (auf einer Äquipotentialfläche) proportional zu $||\vec{E}\,||$.

Skizzieren Sie auf diese Weise die Äquipotentialflächen und den Verlauf von $\vec{E}$ anhand von Feldlinien für folgende Ladungsverteilungen:

(i) Zwei entgegensetzt geladene Punktladungen mit endlichem Abstand.

(ii) Eine Punktladung als Grenzfall von (i), wenn eine Ladung unendlich weit entfernt wird.

(iii) Zwei parallele Ebenen mit endlichem Abstand, die mit unterschiedlichen homogenen Ladungsdichten belegt sind, d.h. den Potential- und Feldverlauf im Inneren eines Plattenkondensators mit idealisiert unendlich ausgedehnten Platten.

(c) Lässt sich das Bild zu (2.i) durch Überlagerung (Übereinanderzeichnung) zweier Bilder zu (2.ii) erhalten?

(B.4) [12 Punkte]

Es sei Σ_0 ein reguläres Flächensegment im Raum, und

$$\Sigma_t = \Sigma_0 + \vec{v}t = \{\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}t \ : \ \vec{x}_0 \in \Sigma_0\} \quad (t \in \mathbb{R})$$

eine zeitlich variierende Familie von Flächen, wobei $\vec{v}$ eine konstante Geschwindigkeit ist. Es sei $\vec{B}(\vec{x})$ ein stetig differenzierbares, nur ortsabhängiges äußeres Magnetfeld. Zeigen Sie, dass für die in die Randkurven-Leiterschleife $\vec{\Gamma}_t = \partial\Sigma_t$ induzierte Spannung zur Zeit t gilt:

$$U_{\mathrm{ind}}(t) = \mathcal{K}'' \int_{\vec{\Gamma}_t} (\vec{v} \times \vec{B}) \bullet d\vec{\Gamma}_t$$