Prof. Dr. R. Verch
Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Sommersemester 2015

Übungen zu TP2-Elektrodynamik (Staatsexamen Lehramt)
Große Hausaufgabe

Das Erreichen von 50% (entsprechend 20 Punkten) der Punkte der Großen Hausaufgabe ist erforderlich für die Zulassung zur Klausur (Modulprüfung). Die Abgabefrist für die Bearbeitungen endet am Montag, 29.06.2015, zu Beginn des Übungsseminars.

A - Fragen zum Inhalt der Vorlesung (und der Übungen). Beantworten Sie die folgenden Fragen knapp aber möglichst treffend. Verwenden Sie Formeln und Skizzen. Erklären Sie die Bedeutung der Formelsymbole. Die Antwort einer Frage soll nicht mehr als eine Seite in Anspruch nehmen. Wenn Beweise von Sachverhalten erbracht werden sollen, so wird dies in der Frage betont.
Der Wert jeder Frage beträgt 4 Punkte.

(A.1) Erläutern Sie das Gaußsche Gesetz der Elektrostatik in integraler und differentieller Form. Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen beiden Formen des Gaußschen Gesetzes?

(A.2) Erläutern Sie das Faradaysche Induktionsgesetz. Gehen Sie dabei auf seine Formulierungen in differentieller und integraler Form ein.

(A.3) Was wird unter einem Vektorpotential für ein Vektorfeld verstanden? Unter welchen Bedingungen hat ein Vektorfeld ein Vektorpotential? Für welches Feld in der Elektrodynamik ergibt sich die Existenz eines Vektorpotentials?

(A.4) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen elektrischem Widerstand und Stromdichte für einen elektrisch leitenden "dicken Draht", der von einer stationären Stromdichte $\vec{j}$ durchflossen wird.

/...2

B - zu lösende Aufgaben

Lösen Sie zwei der folgenden 4 Aufgaben. Wenn Sie mehr als 2 Aufgaben bearbeiten, werden nur die besten 2 Bearbeitungen für die Gesamtpunktzahl gezählt.

(B.1) [12 Punkte]

In dieser Aufgabe bezeichnet $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ die Standardbasis der kartesischen Koordinaten des $\mathbb{R}^3$. Die räumlichen Kugelkoordinaten sind

$$x_1 = r\sin(\theta)\cos(\varphi)\,, \quad x_2 = r\sin(\theta)\sin(\varphi)\,, \quad x_3 = r\cos(\theta)\,, \quad (r \geq 0\,, 0 \leq \theta < \pi\,, -\pi \leq \varphi < \pi)\,.$$

(a) Prüfen Sie, ob das Vektorfeld $\vec{D}(\vec{x})$, das bzgl. Kugelkoordinaten ausgedrückt wird durch

$$\vec{D}(r,\theta,\varphi) = r\cos(\theta)\vec{e}_1 + r^2\vec{e}_2 + \sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{e}_3\,,$$

ein Gradientenvektorfeld sein kann.

(b) Die Kurve $\vec{c}$ sei die Randkurve des im Ursprung der $\{x_3 = 0\}$-Ebene zentrierten Quadrats mit der Kantenlänge ℓ. Die Kurve sei so orientiert, dass der Einheitsvektor in x_3-Richtung einen rechtshändig orientierten Normalenvektor des Quadrats bildet. Berechnen Sie

$$\int_{\vec{c}} (\vec{F} \bullet d\vec{c})$$

für das bzgl. Kugelkoordinaten angegebene Vektorfeld

$$\vec{F}(r,\theta,\varphi) = r(\cos(\theta)+\sin(\theta)\sin(\varphi))\vec{e}_1 + r(\cos(\theta)+\sin(\theta)\cos(\varphi))\vec{e}_2 + r\sin(\theta)(\cos(\varphi)+\sin(\varphi))\vec{e}_3$$

Hinweis: Es ist empfehlenswert, zunächst die Rotation der Vektorfelder zu bestimmen.

(B.2) [12 Punkte]

Es sei $\mathcal{V}$ das Volumen, das gebildet wird durch den $\{x_3 > 0\}$-Teil der Kugel mit dem Radius R, die im Koordinatenursprung zentriert ist. Es sei außerdem das Vektorfeld

$$\vec{g}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0 x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben (dabei ist g_0 eine positive Konstante).

Weisen Sie für diese Situation die Gültigkeit des Satzes von Gauß nach, indem Sie jeweils

$$\int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \bullet \vec{g})(\vec{x})\, d^3x \qquad \text{und} \qquad \int_{\partial V} (\vec{g}(y) \bullet \vec{n}_O(y))\, d\sigma(y)$$

berechnen und zeigen, dass beide Ausdrücke dasselbe Ergebnis liefern.

Hinweis: Verwenden Sie Kugelkoordinaten.

/...3

(B.3) [12 Punkte]

Das zeitgemittelte elektrische Potential des Hüllenelektrons im Wasserstoffatom ist gegeben durch

$$\varphi(\vec{x}\,) = e\mathcal{K}\frac{\mathrm{e}^{-\beta r}}{r}\left(1+\frac{\beta r}{2}\right)\,, \quad r = ||\vec{x}\,|| > 0\,,$$

mit e = Elementarladung des Elektrons und $\beta = 2/a_0$, wobei $a_0 = 0,529 \cdot 10^{-10}$m den Bohrschen Radius bezeichnet.

(a) Berechnen Sie die Ladungsdichte $\varrho(\vec{x}\,)$, die der zeitlich gemittelten Ladungsdichte des Hüllenelektrons entspricht.

(b) Berechnen Sie das zeitlich gemittelte elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x}\,)$ des Elektrons. Geben Sie die elektrische Selbstenergiedichte $\mathcal{E}_{\mathrm{pot}}(\varrho)$ der zeitlich gemittelten Ladungsdichte ϱ bei $r = a_0$ und $r = 2a_0$ an (in MKSA-Einheiten).

(c) Berechenen Sie die zeitlich gemittelte Gesamtladung Q in der Kugel vom Radius $r = 2a_0$ (in MKSA-Einheiten).

(B.4) [12 Punkte]

Betrachten Sie ein System aus zwei parallelen, unendlich ausgedehnten und unendlich dicken "Leiterplatten" mit den Volumina

$$\mathcal{V}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x < -\ell_0\}\,, \quad \mathcal{V}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > \ell_0\}\,,$$

wobei $\ell_0 > 0$ eine Konstante ist (in geeigneter Längeneinheit). Der "Außenraum" `Aus` dieser Leiteranordnung ist der Raum zwischen den beiden Leitervolumina.
Bestimmen Sie in diesem Fall die Potentiale $\varphi_j^{(1)}(\vec{x}\,)$ mit

$$-\Delta\varphi_j^{(1)}(\vec{x}\,) = 0 \;\text{ für } \vec{x} \in \texttt{Aus}\,, \quad \varphi_j^{(1)}(y) = 1 \cdot \delta_{kj} \;\text{ für } y \in \partial\mathcal{V}_k\,.$$

(Die Bedingung $\varphi_j^{(1)}(\vec{x}\,) \to 0$ für $||\vec{x}\,|| \to \infty$ ist hier nicht erfüllbar — warum?)
Berechnen Sie die "Kapazitätskoeffizienten pro Einheitsfläche", also

$$c_{kj} = -\frac{1}{4\pi\mathcal{K}}\int_{S_k} \vec{\nabla}\varphi_j^{(1)}(y) \bullet \vec{n}_k \, d\sigma(y)\,,$$

wobei $\vec{n}_k$ der äußere Einheits-Normalenvektor auf dem Rand von $\mathcal{V}_k$ ist und S_k ein Teil von $\partial\mathcal{V}_k$ mit Flächeninhalt = 1. Ist die Definition abhängig von der Wahl von S_k? Prüfen Sie, ob die Relationen

$$c_{11} = c_{22} \quad \text{und} \quad c_{11} + c_{12} \ll c_{11}$$

erfüllt sind.