Prof. Dr. R. Verch
Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Sommersemester 2015

Übungen zu TP2-Elektrodynamik (Staatsexamen Lehramt)
Aufgabenblatt 12

Aufgabe 12.1 [12 Punkte]

Der elektromagnetische Feldtensor $(\boldsymbol{F}_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0}^3$ für ein elektromagnetisches $\vec{E}$, $\vec{B}$ Feld ist definiert durch

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei werden die Zeilen/Spalten von oben nach unten/von links nach rechts von 0 bis 3 durchnummeriert, also $F_{02} = E_2/c$, $F_{23} = -B_1$ etc. c ist die Lichtgeschwindigkeit, und

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass mit $x_0 = ct$ und

$$\underset{\sim}{\mathcal{A}}(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathcal{A}}_0(t,\vec{x}) \\ \underset{\sim}{\mathcal{A}}_1(t,\vec{x}) \\ \underset{\sim}{\mathcal{A}}_2(t,\vec{x}) \\ \underset{\sim}{\mathcal{A}}_3(t,\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(t,\vec{x})/c \\ -\vec{A}(t,\vec{x}) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \mathcal{A}(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix} \phi(t,\vec{x}) \\ \vec{A}(t,\vec{x}) \end{pmatrix},$$

wobei $\mathcal{A}$ ein elektrodynamisches Potential für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ist, die Gleichungen

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\underset{\sim}{\mathcal{A}}_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\underset{\sim}{\mathcal{A}}_\mu \quad (\mu,\nu = 0,1,2,3)$$

gelten.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\boldsymbol{F}_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\boldsymbol{F}_{\nu\lambda} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\boldsymbol{F}_{\lambda\mu} = 0 \quad (\lambda,\mu,\nu = 0,1,2,3)$$

äquivalent sind zu den homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0\,, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \vec{0}$$

Aufgabe 12.2 [12 Punkte]

Als Konsequenz aus dem Einsteinschen Relativitätsprinzip ergibt sich folgendes: Wenn ein Inertialsystem mit den Koordinaten (t', x', y', z') sich gegenüber einem anderen Inertialsystem mit den Koordinaten (t, x, y, z) mit konstanter Geschwindigkeit v entlang der gemeinsamen x-Koordinatenachse bewegt, und angenommen wird, dass die gestrichenen und ungestrichenen Koordinatenachsen in y und z Richtung jeweils übereinstimmen, dann gilt (bei Wahl gemeinsamer Koordinaten-Nullpunkte der Inertialsysteme) das relativistische Transformationsgesetz

$$(\star) \qquad ct' = \gamma(v)(ct - vx/c)\,, \quad x' = \gamma(v)(x - vt)\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z$$

wobei $\gamma(v) = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$. Dieser Zusammenhang wird in der VL diskutiert werden; hier sollen sie ihn benutzen.

Gehen Sie davon aus, dass sich ein weiteres Inertialsystem mit den Koordinaten (t'', x'', y'', z'') entlang der gemeinsamen x-Koordinatenachse mit konstanter Geschwindigkeit u gegenüber dem Inertialsystem mit den Koordinaten (t', x', y', z') bewegt (d.h. die x, x' und x'' Koordinatenachsen fallen zusammen, und die Bewegungen der Inertialsysteme erfolgen entlang dieser Koordinatenachse). Nehmen Sie auch an, dass die gestrichenen und doppelt gestrichenen Koordinatenachsen in y und z Richtung jeweils übereinstimmen, und dass gemeinsame Nullpunkte aller Inertialsysteme gewählt wurden. Zeigen Sie, dass sich dann das Inertialsystem mit den (t'', x'', y'', z'') Koordinaten gegenüber dem mit den (t, x, y, z) mit der Geschwindigkeit w entlang der gemeinsamen x-Koordinatenachse bewegt, wobei w gegeben ist durch

$$w = \frac{v + u}{1 + (vu/c^2)} \qquad \text{(Relativistisches Geschwindigkeitsadditionsgesetz)}\,.$$

Zeigen Sie auch, dass

$$ct'' = \gamma(w)(ct - wx/c)\,, \quad x'' = \gamma(w)(x - wt)\,, \quad y'' = y\,, \quad z'' = z$$

gilt.

Wenn $v = 0,9c$ und $u = 0,95c$ betragen, wie groß ist dann w?

Aufgabe 12.3 [12 Punkte]

Betrachten Sie in einem Inertialsystem mit den Koordinaten (t, x, y, z) eine Kugelwelle der Form

$$u(t, \vec{x}\,) = \frac{f(t - ||\vec{x}\,||/c)}{||\vec{x}\,||}\,, \quad \vec{x} = (x, y, z)\,.$$

Wenn ein weiteres Inertialsystem (t', x', y', z') gegeben ist so, dass die Relationen $(\star)$ gelten, ist dann u bezüglich der Koordinaten (t', x', y', z') wieder eine Kugelwelle mit derselben Ausbreitungsgeschwindigkeit c wie im Inertialsystem mit den Koordinaten (t, x, y, z)?

Abgabe: Bis Montag, 13. Juli 2015, vor dem Übungsseminar