
Übungen zu TP2-Elektrodynamik (Staatsexamen Lehramt)
Aufgabenblatt 11

Aufgabe 11.1

[12 Punkte]

Es sei $g(t, \vec{x})$ eine glatte, reell- oder komplexwertige Funktion von Zeit und Ort, von der angenommen wird, dass $g(t, \vec{x}) = 0$ wenn $(ct)^2 + \|\vec{x}\|^2 > R^2$ für ein $R > 0$. Überprüfen Sie, dass

$$u_g^{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} g\left(t - \frac{\|\vec{x} - \vec{y}\|}{c}, \vec{y}\right) \cdot \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} d^3y$$

eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\Delta u_g^{\text{ret}}(t, \vec{x}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_g^{\text{ret}}(t, \vec{x}) = g(t, \vec{x})$$

ist und dass

$$u_g^{\text{ret}}(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{für } (t, \vec{x}) \text{ außerhalb von } \bigcup_{(cs)^2 + \|\vec{y}\|^2 \leq R^2} V_c^+(s, \vec{y})$$

gilt, wobei $V_c^+(s, \vec{y}) = \{(t', \vec{x}') : t' - s \geq 0, c(t' - s) = \|\vec{x}' - \vec{y}\|\}$. Fertigen Sie eine Skizze für das zeitlich/räumliche Verhalten von $u_g^{\text{ret}}(t, \vec{x})$ an, die zeigt, wo und wann die Lösung gleich 0 ist. Interpretieren Sie auf dieser Grundlage die Bezeichnung "retardierte Lösung".

Aufgabe 11.2

[12 Punkte]

Es sei $f(s)$ eine glatte (reell- oder komplexwertige) Funktion der reellen Variablen s .

(a) Zeigen Sie, dass für Ortsvektoren $\vec{x} \neq \vec{0}$ gilt

$$\Delta f(\|\vec{x}\|) = f''(\|\vec{x}\|) + \frac{2f'(\|\vec{x}\|)}{\|\vec{x}\|}$$

wobei Δ der räumliche Laplaceoperator ist. f' ist die Ableitung von f .

/...2

(b) Eine Funktion der Form

$$\xi^\pm(t, \vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|} f\left(t \pm \frac{\|\vec{x}\|}{c}\right)$$

wird als *einlaufende* (+) bzw. *auslaufende* (-) *Kugelwelle* bezeichnet. Weisen Sie nach, dass

$$\Delta \xi^\pm(t, \vec{x}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^\pm(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{für } \|\vec{x}\| > 0$$

gilt.

(c) Fertigen Sie eine Skizze an, die das Ausbreitungsverhalten von $\xi^\pm(t, \vec{x})$ und die Bezeichnung "einlaufende/auslaufende Kugelwelle" verdeutlicht.

Aufgabe 11.3

[12 Punkte]

Es seien zwei Inertialsysteme gegeben: Das erste mit den Zeit- /Raumkoordinaten (t, \vec{x}) , das zweite mit den Zeit- /Raumkoordinaten (t', \vec{x}') . Das zweite Inertialsystem bewege sich gegenüber dem ersten mit konstanter Geschwindigkeit, so dass nach dem Bild der *Galileisch-Newtonschen Raumzeit* die Koordinaten (t', \vec{x}') eines Ereignisses im 2. Inertialsystem aus den Koordinaten (t, \vec{x}) des Ereignisses im 1. Inertialsystem durch eine Galileitransformation hervorgehen:

$$(t', \vec{x}') = (t, \vec{x} + t\vec{v})$$

mit einem festen Geschwindigkeitsvektor \vec{v} .

Betrachten Sie eine harmonische monochromatische ebene Welle, die im ersten Inertialsystem beschrieben wird in der Form

$$u(t, \vec{x}) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad \text{mit } \omega = c \cdot \|\vec{k}\|.$$

- (a) Bezüglich des zweiten Inertialsystems wird $u(t, \vec{x})$ beschrieben als eine Funktion $u'(t', \vec{x}')$ (dabei bedeutet u' keine Ableitung, sondern weist darauf hin, dass die Funktion u in anderen Koordinaten beschrieben wird). Zeigen Sie, dass $u'(t', \vec{x}')$ wieder von der Form einer ebenen Welle ist (bzgl. der Koordinaten (t', \vec{x}')), aber i.a. mit einer anderen Kreisfrequenz ω' und anderen Ausbreitungsgeschwindigkeit c' . Ermitteln Sie ω' und c' als Funktionen von $\omega, c, \vec{k}, \vec{v}$.
- (b) Experimentelle Ergebnisse bestätigen das *Einsteinsche Relativitätsprinzip*, wonach die Ausbreitung von Licht — d.h. von elektromagnetischen Wellen im Vakuum — in allen Inertialsystemen mit derselben Geschwindigkeit c erfolgt. Argumentieren Sie mit Hilfe des Resultats aus Teil (a), dass Galileitransformationen zwischen Inertialsystemen im allgemeinen nicht mit dem Einsteinschen Relativitätsprinzip vereinbar sind.

Abgabe: Bis Montag, 6. Juli 2015, vor dem Übungsseminar