Prof. Dr. R. Verch
Dr. Ko Sanders

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Sommersemester 2014

Übungen zu TP2-Elektrodynamik (Staatsexamen Lehramt)
Aufgabenblatt 9

Aufgabe 9.1 [12 Punkte]

Berechnen Sie für einen Punktdipol bei $\vec{x} = \vec{0}$ mit Dipolmoment

$$\vec{d}(t) = d\vec{e}_1 \cos(\omega t)$$

(i) den Poynting-Vektor $\vec{S}(t, \vec{x})$ in Fernfeldnäherung

(ii) die mittlere abgestrahle Leistung

$$\overline{P} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \int_{||\vec{x}||=R} \vec{S}(t, y) \bullet \vec{n}_O(y)\, d\sigma(y)\, dt$$

mit $T = 2\pi/\omega$ und R so groß, dass die Fernfeldnäherung gilt

(iii) in geeigneten sphärischen Polarkoordinaten die mittlere Strahlungsleistung der Strahlung, die in einen kleinen Winkelbereich $\delta\theta \cdot \delta\varphi$ um eine Raumrichtung $\vec{n} = \vec{x}/||\vec{x}||$ abgestrahlt wird:

$$\overline{P}(\vec{n}, \delta\theta, \delta\varphi) = \delta\theta \cdot \sin(\theta)\delta\varphi \cdot R^2 \cdot \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \vec{n} \bullet \vec{S}(t, R\vec{n})\, dt \ ,$$

von Interesse ist hier die Abhängigkeit von der Raumrichtung $\vec{n}$. Dabei sei R so groß gewählt, dass die Fernfeldnäherung gilt.

Aufgabe 9.2 [12 Punkte]

Betrachten Sie in einem Inertialsystem mit den Koordinaten $(t, \vec{x})$ die Kugelwelle

$$u(t, \vec{x}) = \frac{f(t - ||\vec{x}||/c)}{||\vec{x}||}$$

und die Koordinatentransformationen

$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x_1 - vt \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} t^* \\ \vec{x}^{\,*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \cdot (t - vx_1/c^2) \\ \gamma \cdot (x_1 - vt) \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Dabei ist v eine Geschwindigkeit und c die Lichtgeschwindigkeit (in geeigneten Einheiten), und

$$\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Ist die Funktion u bezgl. der Koordinaten $(t', \vec{x}\,')$ bzw. $(t^*, \vec{x}\,^*)$ wieder vom Typ einer Kugelwelle? Ändert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit? Erfüllt u bezgl. der neuen Koordinaten die ursprüngliche homogene Wellengleichung (mit Lichtgeschwindigkeit c) außerhalb der Koordinaten-Punkte, an denen die Funktion singulär wird?

Aufgabe 9.3 [12 Punkte]

Der elektromagnetische Feldtensor $(\boldsymbol{F}_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0}^{3}$ für ein elektromagnetisches $\vec{E}$, $\vec{B}$ Feld ist definiert durch

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei werden die Zeilen/Spalten von oben nach unten/von links nach rechts von 0 bis 3 durchnummeriert, also $F_{02} = E_2/c$, $F_{23} = -B_1$ etc. c ist die Lichtgeschwindigkeit, und

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass mit $x_0 = ct$ und

$$\underset{\sim}{\mathcal{A}}(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathcal{A}}_0(t,\vec{x}) \\ \underset{\sim}{\mathcal{A}}_1(t,\vec{x}) \\ \underset{\sim}{\mathcal{A}}_2(t,\vec{x}) \\ \underset{\sim}{\mathcal{A}}_3(t,\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(t,\vec{x})/c \\ -\vec{A}(t,\vec{x}) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \mathcal{A}(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix} \phi(t,\vec{x}) \\ \vec{A}(t,\vec{x}) \end{pmatrix},$$

wobei $\mathcal{A}$ ein elektrodynamisches Potential für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ist, die Gleichungen

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\underset{\sim}{\mathcal{A}}_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\underset{\sim}{\mathcal{A}}_\mu \quad (\mu,\nu = 0,1,2,3)$$

gelten.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\boldsymbol{F}_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\boldsymbol{F}_{\nu\lambda} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\boldsymbol{F}_{\lambda\mu} = 0 \quad (\lambda,\mu,\nu = 0,1,2,3)$$

äquivalent sind zu den homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0\,, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \vec{0}$$

Abgabe: Bis Di., 01.07.2014, vor dem Übungsseminar