Prof. Dr. R. Verch
Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Sommersemester 2015

Übungen zu TP2-Elektrodynamik (Staatsexamen Lehramt)
Aufgabenblatt 9

Aufgabe 9.1

Auf ein Teilchen mit der elektrischen Ladung q und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ am Ort $\vec{x}$ in einem externen Magnetfeld $\vec{B}(\vec{x}\,)$ wirkt die *Lorentzkraft*

$$\vec{F}(\vec{x}\,) = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}\,)\,.$$

In einem Fadenstrahlrohr werden Elektronen (elektrische Ladung e, Ruhemasse m) mit einer Beschleunigungsspannung U_B beschleunigt und mit einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}$ infolge der Lorentzkraft senkrecht zur Bewegungsrichtung abgelenkt so, dass die Elektronen eine Kreisbahn durchlaufen. Der Radius des Kreises sei r.

(a) Skizzieren Sie die Anordnung mit Magnetfeld und Lorentzkraft. Achten Sie auf die Richtungen von Magnetfeld und Lorentzkraft.

(b) Ermitteln Sie das Verhältnis e/m von Elektronenladung zu Elektronenmasse aus folgenden Daten: $U_B = 250\ V$ (Volt), $||\vec{B}\,|| = 1,75 \cdot 10^{-3} T$ (Tesla), $r = 0,03$ m (Meter). Es werden SI-Einheiten verwendet. Vergleichen Sie den erhaltenen Wert mit dem Literaturwert und ermitteln Sie die Abweichung in Prozent.

Aufgabe 9.2

Es sei $\vec{e}_3$ der Einheitsvektor entlang der x_3-Koordinatenrichtung. Es sei eine stationäre Stromverteilung $\vec{j}(\vec{x}\,)$ gegeben wie folgt:

$$\vec{j}(\vec{x}\,) = \begin{cases} \frac{I_0}{\pi R_0^2}\vec{e}_3\,, \quad 0 \leq ||\vec{x}\,|| \leq R_0 \\ \vec{0}\,, \quad R_0 < ||\vec{x}\,|| < R_1 \\ -\frac{I_0}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}\vec{e}_3\,, \quad R_1 \leq ||\vec{x}\,|| \leq R_2 \\ \vec{0}\,, \quad ||\vec{x}\,|| > R_2 \end{cases}$$

wobei I_0 und R_0, R_1, R_2 positive Konstanten sind (in geeigneten Einheiten)
mit $R_0 < R_1 < R_2$.

Bestimmen Sie das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{x}\,)$ (genauer: Vektorfeld der magnetischen Induktion), das aufgrund des Ampèreschen Gesetzes durch die Stromverteilung $\vec{j}(\vec{x}\,)$ hervorgerufen wird. Skizzieren Sie den radialen Verlauf des Magnetfelds.

/...2

Hinweis: Betrachten Sie das Problem in Zylinderkoordinaten, d.h.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

mit $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$. Sie dürfen davon Gebrauch machen, dass $\vec{B}(\vec{x}\,)$ azimutal gerichtet ist, d.h. in Zylinderkoordinaten gilt

$$\vec{B}(\vec{x}\,) = B(r) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit einer Funktion $B(r)$, die bestimmt werden soll. Mit "skizzieren Sie den radialen Verlauf des Magnetfelds" ist gemeint, dass Sie den Verlauf von $B(r)$ in Abhängigkeit von r skizzieren sollen.

Aufgabe 9.3

Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge, die bzgl. eines Punktes $\vec{y} \in G$ sternförmig ist, d.h. für jedes $\vec{x} \in G$ ist auch die Verbindungslinie zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ in G enthalten, also alle Punkte $\mu(\vec{x} - \vec{y}\,) + \vec{y}$ für $0 \leq \mu \leq 1$.
Es sei $\vec{B} : G \to \mathbb{R}^3$ ein C^1 Vektorfeld mit der Eigenschaft $\vec{\nabla} \bullet \vec{B}(\vec{x}) = 0$ für jedes $\vec{x} \in G$. Zeigen Sie, dass für das Vektorfeld $\vec{A} : G \to \mathbb{R}^3$, das durch

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int_0^1 \vec{B}(\mu(\vec{x} - \vec{y}) + \vec{y}) \times \mu(\vec{x} - \vec{y})\, d\mu \qquad (\vec{x} \in G)$$

definiert ist, die Gleichung

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) \qquad (\vec{x} \in G)$$

gilt.

Hinweise:

(i) Das Integral ist für jede Vektorkomponente als zahlenwertiges Integral im üblichen Sinne zu verstehen.
(ii) Integration und Differentiation dürfen vertauscht werden. Sie brauchen nicht nachzuweisen, dass $\vec{A}$ zweimal stetig differenzierbar ist.
(iii) Für C^1 Vektorfelder $\vec{f}$ und $\vec{g}$ gilt

$$\vec{\nabla} \times (\vec{f} \times \vec{g}) = (\vec{g} \bullet \vec{\nabla})\vec{f} - (\vec{f} \bullet \vec{\nabla})\vec{g} + \vec{f}(\vec{\nabla} \bullet \vec{g}) - \vec{g}(\vec{\nabla} \bullet \vec{f}\,),$$

wobei $(\vec{g} \bullet \vec{\nabla})\vec{f} = \sum_{j=1}^{3} g_j(\partial \vec{f}/\partial x_j)$ ist.

Wert jeder Aufgabe: 12 Punkte

Abgabe, Bis Mo., 15.06.2015, vor dem Übungsseminar