Prof. Dr. R. Verch
Dr. Ko Sanders

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Sommersemester 2014

Übungen zu TP2-Elektrodynamik (Staatsexamen Lehramt)
Aufgabenblatt 8

Aufgabe 8.1 [12 Punkte]
Es sei $g(t,\vec{x})$ eine glatte, reell- oder komplexwertige Funktion von Zeit und Ort, von der angenommen wird, dass $g(t,\vec{x}) = 0$ wenn $(ct)^2 + ||\vec{x}\,||^2 > R^2$ für ein $R > 0$. Überprüfen Sie, dass

$$u_g^{\rm ret}(t,\vec{x}) = \frac{-1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} g\left(t - \frac{||\vec{x}-\vec{y}||}{c}, \vec{y}\right) \cdot \frac{1}{||\vec{x}-\vec{y}||}\, d^3y$$

eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\Delta u_g^{\rm ret}(t,\vec{x}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_g^{\rm ret}(t,\vec{x}) = g(t,\vec{x})$$

ist und dass

$$u_g^{\rm ret}(t,\vec{x}) = 0 \quad \text{für} \quad (t,\vec{x}) \quad \text{außerhalb von} \quad \bigcup_{(cs)^2+||\vec{y}\,||^2\le R^2} V_c^+(s,\vec{y})$$

gilt, wobei $V_c^+(s,\vec{y}) = \{(t',\vec{x}\,') : t'-s \ge 0,\ c(t'-s) = ||\vec{x}\,'-\vec{y}\,||\}$. Fertigen Sie eine Skizze für das zeitlich/räumliche Verhalten von $u_g^{\rm ret}(t,\vec{x})$ an, die zeigt, wo und wann die Lösung gleich 0 ist. Interpretieren Sie auf dieser Grundlage die Bezeichnung "retardierte Lösung".

Aufgabe 8.2 [12 Punkte (a - c) + 6 Punkte (d)]
Es sei $f(s)$ eine glatte (reell- oder komplexwertige) Funktion der reellen Variablen s.

(a) Zeigen Sie, dass für Ortsvektoren $\vec{x} \neq \vec{0}$ gilt

$$\Delta f(||\vec{x}||) = f''(||\vec{x}||) + \frac{2f'(||\vec{x}||)}{||\vec{x}||}$$

wobei Δ der räumliche Laplaceoperator ist. f' ist die Ableitung von f.

/...2

(b) Eine Funktion der Form

$$\xi^{\pm}(t,\vec{x}) = \frac{1}{||\vec{x}||} f\left(t \pm \tfrac{||\vec{x}||}{c}\right)$$

wird als *einlaufende* (+) bzw. *auslaufende* (−) *Kugelwelle* bezeichnet. Weisen Sie nach, dass

$$\Delta\xi^{\pm}(t,\vec{x}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^{\pm}(t,\vec{x}) = 0 \quad \text{für} \quad ||\vec{x}|| > 0$$

gilt.

(c) Fertigen Sie eine Skizze an, die das Ausbreitungsverhalten von $\xi^{\pm}(t,\vec{x})$ und die Bezeichung "einlaufende/auslaufende Kugelwelle" verdeutlicht.

(d) *(Nicht prüfungsrelevant — Zusatzaufgabe)* Zeigen Sie, dass

$$\Delta\xi^{\pm}(t,\vec{x}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^{\pm}(t,\vec{x}) = -4\pi\delta(\vec{x})f(t)$$

gilt.

Aufgabe 8.3 [12 Punkte]

Es seien zwei Inertialsysteme gegeben: Das erste mit den Zeit- /Raumkoordinaten $(t,\vec{x})$, das zweite mit den Zeit- /Raumkoordinaten $(t',\vec{x}\,')$. Das zweite Inertialsystem bewege sich gegenüber dem ersten mit konstanter Geschwindigkeit, so dass nach dem Bild der *Galileisch-Newtonschen Raumzeit* die Koordinaten $(t',\vec{x}\,')$ eines Ereignisses im 2. Inertialsystem aus den Koordinaten $(t,\vec{x})$ des Ereignisses im 1. Inertialsystem durch eine Galileitransformation hervorgehen:

$$(t',\vec{x}\,') = (t, \vec{x} + t\vec{v})$$

mit einem festen Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$.

Betrachten Sie eine harmonische monochromatische ebene Welle, die im ersten Inertialsystem beschrieben wird in der Form

$$u(t,\vec{x}) = \mathrm{e}^{i(\vec{k}\bullet\vec{x}-\omega t)} \quad \text{mit} \quad \omega = c\cdot||\vec{k}||\,.$$

(a) Bezüglich des zweiten Inertialsystems wird $u(t,\vec{x})$ beschrieben als eine Funktion $u'(t',\vec{x}\,')$ (dabei bedeutet u' keine Ableitung, sondern weist darauf hin, dass die Funktion u in anderen Koordinaten beschrieben wird). Zeigen Sie, dass $u'(t',\vec{x}\,')$ wieder von der Form einer ebenen Welle ist (bzgl. der Koordinaten $(t',\vec{x}\,')$), aber i.a. mit einer anderen Kreisfrequenz ω' und anderen Ausbreitungsgeschwindigkeit c'. Ermitteln Sie ω' und c' als Funktionen von $\omega, c, \vec{k}, \vec{v}$.

(b) Experimentelle Ergebnisse bestätigen das *Einsteinsche Relativitätsprinzip*, wonach die Ausbreitung von Licht — d.h. von elektromagnetischen Wellen im Vakuum — in allen Inertialsystemen mit derselben Geschwindigkeit c erfolgt. Argumentieren Sie mit Hilfe des Resultats aus Teil (a), dass Galileitransformationen zwischen Inertialsystemen im allgemeinen nicht mit dem Einsteinschen Relativitätsprinzip vereinbar sind.

Abgabe: Bis Donnerstag, 26.06.2014, 12.00 Uhr, im Postfach von Dr. Sanders im ITP.