Prof. Dr. R. Verch
Dr. Ko Sanders

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Sommersemester 2014

Übungen zu TP2-Elektrodynamik (Staatsexamen Lehramt)
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 7.1 [12 Punkte]

Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge, die bzgl. eines Punktes $\vec{y} \in G$ sternförmig ist, d.h. für jedes $\vec{x} \in G$ ist auch die Verbindungslinie zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ in G enthalten, also alle Punkte $\mu(\vec{x} - \vec{y}\,) + \vec{y}$ für $0 \leq \mu \leq 1$.

Es sei $\vec{B} : G \to \mathbb{R}^3$ ein C^1 Vektorfeld mit der Eigenschaft $\vec{\nabla} \bullet \vec{B}(\vec{x}) = 0$ für jedes $\vec{x} \in G$. Zeigen Sie, dass für das Vektorfeld $\vec{A} : G \to \mathbb{R}^3$, das durch

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int_0^1 \vec{B}(\mu(\vec{x} - \vec{y}) + \vec{y}) \times \mu(\vec{x} - \vec{y})\, d\mu \qquad (\vec{x} \in G)$$

definiert ist, die Gleichung

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) \qquad (\vec{x} \in G)$$

gilt.

Hinweise:

(i) Das Integral ist für jede Vektorkomponente als zahlenwertiges Integral im üblichen Sinne zu verstehen.

(ii) Integration und Differentiation dürfen vertauscht werden. Sie brauchen nicht nachzuweisen, dass $\vec{A}$ zweimal stetig differenzierbar ist.

(iii) Für C^1 Vektorfelder $\vec{f}$ und $\vec{g}$ gilt

$$\vec{\nabla} \times (\vec{f} \times \vec{g}) = (\vec{g} \bullet \vec{\nabla})\vec{f} - (\vec{f} \bullet \vec{\nabla})\vec{g} + \vec{f}(\vec{\nabla} \bullet \vec{g}) - \vec{g}(\vec{\nabla} \bullet \vec{f})\,,$$

wobei $(\vec{g} \bullet \vec{\nabla})\vec{f} = \sum_{j=1}^{3} g_j(\partial \vec{f}/\partial x_j)$ ist.

/...2

Aufgabe 7.2 [12 Punkte]

Als *homogene Maxwell-Gleichungen* werden die Maxwell-Gleichungen für den Fall $\varrho = 0$ und $\vec{j} = \vec{0}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass die ebenen Wellen

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \bullet \vec{x})\,, \quad \vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \bullet \vec{x})\,,$$

mit Vektoren $\vec{E}_0\,,\ \vec{B}_0\,,\ \vec{k} \in \mathbb{R}^3$ und $\omega \in \mathbb{R}$ genau dann Lösungen der homogenen Maxwell-Gleichungen sind, wenn *in Gauß-Einheiten* gilt

(1) $c^2 ||\vec{k}\,||^2 = \omega^2$

(2) $\vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c}\vec{B}_0$

(3) $\vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c}\vec{E}_0$

(4) $\vec{k} \bullet \vec{B}_0 = 0$ und $\vec{k} \bullet \vec{E}_0 = 0$

(5) Sofern alle drei Vektoren verschieden von $\vec{0}$ sind, bilden $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}$ eine rechtshändig orientierte Basis des $\mathbb{R}^3$

(6) $||\vec{E}_0\,|| = ||\vec{B}_0\,||$

Wie verändern sich diese Beziehungen im Falle der Verwendung von SI Einheiten?

Aufgabe 7.3 [12 Punkte]

"Textaufgabe": Erläutern Sie die folgenden Begriffe:

(a) Induktionsgesetz

(b) Maxwellsche Ergänzung

(c) Standard-Interpretation der Maxwellschen Gleichungen

(d) Rückwirkungsproblem bei den Maxwellschen Gleichungen

Abgabe: Bis Dienstag, 10.06.2014, vor Beginn des Übungsseminars.