Prof. Dr. R. Verch
Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Sommersemester 2015

Übungen zu TP2-Elektrodynamik (Staatsexamen Lehramt)
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 7.1 [12 Punkte]

Es sei eine Ladungsverteilung mit konstanter Ladungsdichte und konstanter Stromdichte gegeben,

$$\varrho(t,\vec{r}) = \varrho_0\,, \qquad \vec{j}(t,\vec{r}) = j_0\vec{e}_3\,,$$

mit geeigneten, von 0 verschiedenen Konstanten ϱ_0 und j_0. Offenbar gilt dann die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho + \vec{\nabla}\bullet\vec{j} = 0\,.$$

Es sei außerdem $\mathcal{V}(t)$ das zeitabhängige Volumen

$$\mathcal{V}(t) = \{\vec{x} \mid x_1^2 + x_2^2 < R^2 \ \text{ und } \ 0 < x_3 < ht\,\} \quad (t > 0)$$

mit gegebenen positiven Konstanten h und R. Berechnen Sie die Gesamtladung $Q(t)$ in $\mathcal{V}(t)$ und den Fluß $\mathcal{F}(\vec{j}_t, \partial\mathcal{V}(t))$ durch die Oberfläche von $\mathcal{V}(t)$ zur Zeit t. Gilt in diesem Fall $\dot{Q}(t) = -\mathcal{F}(\vec{j}_t, \partial\mathcal{V}(t))$? ($\vec{j}_t$ steht für die Stromdichte z.Zt. t, also für das Vektorfeld $\vec{x} \mapsto \vec{j}_t(\vec{x}\,) = \vec{j}(t,\vec{x}\,)$.)

Aufgabe 7.2 [12 Punkte (a-d) + 9 Punkte (e)]

Gegeben ist eine geschlossene Flussröhre $\mathcal{V}$, die definiert ist durch

$$\mathcal{V} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -\ell/2 < x_3 < \ell/2\,, \ \ R < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R + \ell\}$$

mit positiven Konstanten ℓ und R (in Einheiten einer Länge). In der Flussröhre bestehe eine Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{x}\,) = J_0 \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

($\vec{j}(\vec{x}) = \vec{0}$ für $\vec{x}$ außerhalb von $\mathcal{V}$).

(a) Welche physikalische Einheit hat J_0 (im MKSA-System), wenn die Ortskoordinaten x_j die Einheit einer Länge haben?

/...2

(b) Zeigen Sie, dass $\vec{\nabla} \bullet \vec{j} = 0$ innerhalb der Flussröhre $\mathcal{V}$. Zeigen Sie, dass $\vec{j}$ am Rand $\partial\mathcal{V}$ von $\mathcal{V}$ tangential zu $\partial\mathcal{V}$ verläuft (d.h. es gibt keine zu $\partial\mathcal{V}$ senkrechte Komponente von $\vec{j}$).

(c) Zeigen Sie, dass die Flusslinien $\vec{\Gamma}_y$ von $\vec{j}$ folgendermaßen darstellbar sind:

$$\vec{\Gamma}_y(s) = \begin{pmatrix} y_{\mathsf{r}} \cos(J_0 s) \\ y_{\mathsf{r}} \sin(J_0 s) \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad J_0 s \in [0, 2\pi]$$

wobei $y = (y_{\mathsf{r}}, y_3)$ mit $R < y_{\mathsf{r}} < R + \ell$, $-\ell/2 < y_3 < \ell/2$.

(d) Berechnen Sie den Strom $I(\vec{j}, \Sigma)$ durch die Querschnittsfläche Σ der Flussröhre.

(e) *(Für mathematisch Interessierte — nicht prüfungsrelevant)*
Zeigen Sie, dass es für jede Flusslinie $\vec{\Gamma}$ eine Konstante $I_{\vec{\Gamma}}$ gibt mit der Eigenschaft, dass für jedes C^1-Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{F}(\vec{x}\,) \bullet \vec{j}_m(\vec{x}\,))\, d^3x = I_{\vec{\Gamma}} \int_{\vec{\Gamma}} (\vec{F} \bullet d\vec{\Gamma})$$

wobei

$$\vec{j}_m(\vec{x}\,) = \frac{m^2}{4\pi} \vec{j}(\vec{x}\,) \mathsf{char}_{\mathcal{V}_m}(\vec{x}\,) \quad (m \in \mathbb{N})\,.$$

Dabei ist $\mathcal{V}_m$ die Flussröhre mit kreisförmigem Querschnitt, deren zentrale Flussline durch $\vec{\Gamma}$ gebildet wird und deren Querschnittfläche $4\pi/m^2$ (in Flächeneinheiten) beträgt. Die charakteristische Funktion ist erklärt durch

$$\mathsf{char}_{\mathcal{V}_m}(\vec{x}\,) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } \vec{x} \in \mathcal{V}_m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Transformationssatz für Volumenintegrale, um das Integral $\int_{\mathbb{R}^3} \vec{F}(\vec{x}\,) \bullet \vec{j}_m(\vec{x}\,)\, d^3x$ in den (y_{r}, y_3, s) Koordinaten auszudrücken — d.h. in Zylinderkoordinaten, und beachten Sie, dass $\vec{j}_m(\vec{\Gamma}_y(s)) = d\vec{\Gamma}_y(s)/ds$.

Abgabe: Bis Montag, 01. Juni 2015, vor dem Übungsseminar