Prof. Dr. R. Verch
Dr. Ko Sanders

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Sommersemester 2014

Übungen zu TP2-Elektrodynamik (Staatsexamen Lehramt)
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1 [9 Punkte]

(a) In einem elektrischen Leiter ist die elektrische Leitfähigkeit λ über die Beziehung $\vec{j} = \lambda \vec{E}$ definiert. Welche physikalische Einheit ergibt sich daraus für λ im MKSA System?

(b) Welche physikalische Einheit hat der Widerstand $R = L/(\lambda \cdot A)$ eines dicken Drahtes der Länge L und Querschnittsfläche A im MKSA System?

(c) Welche physikalische Einheit hat die Stromstärke $I_{\vec{\Gamma}}$ eines dünnen, stromdurchflossenen Drahtes im MKSA System?

Aufgabe 5.2 [6 Punkte]

Es sei $\mathcal{K}$ die Kopplungskonstante im Coulombgesetz und $\mathcal{K}'$ die Kopplungskonstante im Ampèreschen Gesetz. Zeigen Sie, dass der Quotient $\mathcal{K}/\mathcal{K}'$ die physikalische Dimension des Quadrats einer Geschwindigkeit hat, unabhängig vom verwendeten Einheitensystem.

Aufgabe 5.3 [12 Punkte]

Es seien $\vec{\Gamma}_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{R}^3$ $(k = 1, 2)$ zwei dünne, geschlossene Leiterschleifen, die jeweils eine reguläre Fläche beranden; die Leiterschleifen sollen sich in einer Entfernung befinden, die groß ist gegenüber ihren Ausdehnungen. Zeigen Sie, dass dann

$$-\int_{\vec{\Gamma}_1}\int_{\vec{\Gamma}_2} \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{||\vec{x}_1 - \vec{x}_2||^3}\, d\vec{\Gamma}_1 \bullet d\vec{\Gamma}_2 = \int_{\vec{\Gamma}_1}\int_{\vec{\Gamma}_2} \frac{((\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \times d\vec{\Gamma}_2) \times d\vec{\Gamma}_1}{||\vec{x}_1 - \vec{x}_2||^3}$$

gilt.

Hinweis: Benutzen Sie die für allgemeine Vektoren $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ gültige Identität $\vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{z}) = (\vec{v} \bullet \vec{z})\vec{w} - (\vec{v} \bullet \vec{w})\vec{z}$. Verwenden Sie ferner, dass nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_{\vec{\Gamma}_1} \left(\vec{\nabla}_{\vec{x}_1} \frac{1}{||\vec{x}_1 - \vec{x}_2||} \right) \bullet d\vec{\Gamma}_1 = \int_{S_1} \vec{\nabla}_{\vec{x}_1} \times \left(\vec{\nabla}_{\vec{x}_1} \frac{1}{||\vec{x}_1 - \vec{x}_2||} \right) d\sigma(y_1)$$

für jede reguläre Fläche S_1, die von $\vec{\Gamma}_1$ berandet wird. Denken Sie auch daran, dass jedes Vektorfeld, das als Gradient einer Funktion geschrieben werden kann, immer Rotation $= 0$ hat.

/...2

Aufgabe 5.4 [12 Punkte (a-d) + 9 Punkte (e)] Gegeben ist eine geschlossene Flussröhre $\mathcal{V}$, die definiert ist durch

$$\mathcal{V} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -\ell/2 < x_3 < \ell/2\,,\quad R < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R + \ell\}$$

mit positiven Konstanten ℓ und R (in Einheiten einer Länge). In der Flussröhre bestehe eine Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{x}\,) = J_0 \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

($\vec{j}(\vec{x}) = \vec{0}$ für $\vec{x}$ außerhalb von $\mathcal{V}$).

(a) Welche physikalische Einheit hat J_0 (im MKSA-System), wenn die Ortskoordinaten x_j die Einheit einer Länge haben?

(b) Zeigen Sie, dass $\vec{\nabla} \bullet \vec{j} = 0$ innerhalb der Flussröhre $\mathcal{V}$. Zeigen Sie, dass $\vec{j}$ am Rand $\partial\mathcal{V}$ von $\mathcal{V}$ tangential zu $\partial\mathcal{V}$ verläuft (d.h. es gibt keine zu $\partial\mathcal{V}$ senkrechte Komponente von $\vec{j}$).

(c) Zeigen Sie, dass die Flusslinien $\vec{\Gamma}_y$ von $\vec{j}$ folgendermaßen darstellbar sind:

$$\vec{\Gamma}_y(s) = \begin{pmatrix} y_{\mathsf{r}} \cos(J_0 s) \\ y_{\mathsf{r}} \sin(J_0 s) \\ y_3 \end{pmatrix}\,, \quad J_0 s \in [0, 2\pi]$$

wobei $y = (y_{\mathsf{r}}, y_3)$ mit $R < y_{\mathsf{r}} < R + \ell$, $-\ell/2 < y_3 < \ell/2$.

(d) Berechnen Sie den Strom $I(\vec{j}, \Sigma)$ durch die Querschnittsfläche Σ der Flussröhre.

(e) *(Für mathematisch Interessierte — nicht prüfungsrelevant)*
Zeigen Sie, dass es für jede Flusslinie $\vec{\Gamma}$ eine Konstante $I_{\vec{\Gamma}}$ gibt mit der Eigenschaft, dass für jedes C^1-Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{F}(\vec{x}\,) \bullet \vec{j}_m(\vec{x}\,))\, d^3x = I_{\vec{\Gamma}} \int_{\vec{\Gamma}} (\vec{F} \bullet d\vec{\Gamma})$$

wobei

$$\vec{j}_m(\vec{x}\,) = \frac{m^2}{4\pi} \vec{j}(\vec{x}\,)\mathsf{char}_{\mathcal{V}_m}(\vec{x}\,) \quad (m \in \mathbb{N})\,.$$

Dabei ist $\mathcal{V}_m$ die Flussröhre mit kreisförmigem Querschnitt, deren zentrale Flussline durch $\vec{\Gamma}$ gebildet wird und deren Querschnittfläche $4\pi/m^2$ (in Flächeneinheiten) beträgt. Die charakteristische Funktion ist erklärt durch

$$\mathsf{char}_{\mathcal{V}_m}(\vec{x}\,) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } \vec{x} \in \mathcal{V}_m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Transformationssatz für Volumenintegrale, um das Integral $\int_{\mathbb{R}^3} (\vec{F}(\vec{x}\,) \bullet \vec{j}_m(\vec{x}\,)\, d^3x$ in den (y_{r}, y_3, s) Koordinaten auszudrücken — d.h. in Zylinderkoordinaten, und beachten Sie, dass $\vec{j}_m(\vec{\Gamma}_y(s)) = d\vec{\Gamma}_y(s)/ds$.

Abgabe: Am Di., 27.05.2014, im Übungsseminar