
Übungen zu TP2-Elektrodynamik (Staatsexamen Lehramt)
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 4.1

[20 Punkte]

Es sei folgende elektrostatische Ladungsdichteverteilung gegeben:

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq \|\vec{x}\| < r \\ \rho_0 \sin(\|\vec{x}\| - r) & \text{für } r \leq \|\vec{x}\| < r + \pi \\ 0 & \text{für } r + \pi \leq \|\vec{x}\| < R \\ -\rho_0 \sin(\|\vec{x}\| - R) & \text{für } R \leq \|\vec{x}\| < R + \pi \\ 0 & \text{für } \|\vec{x}\| \geq R \end{cases}$$

Dabei ist ρ_0 eine positive Konstante (Einheit: Ladungsdichte in MKSA) und r, R sind geeignete positive Konstanten (in Einheiten einer Länge).

- (a) Zeigen Sie, dass das* Potential $\varphi(\vec{x})$ sich bei räumlichen Drehungen nicht ändert. Schließen (oder zeigen) Sie, dass $\varphi(\vec{x})$ nur von $\|\vec{x}\|$ abhängt.
- (b) Skizzieren Sie den Verlauf von $\rho(\vec{x})$ als Funktion von $\|\vec{x}\|$.
- (c) Berechnen Sie $\varphi(\vec{x})$.
- (d) Skizzieren Sie den Verlauf von $\varphi(\vec{x})$ als Funktion von $\|\vec{x}\|$.

* Potentiale von Ladungsverteilungen sind höchstens bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt. Hier ist das Potential gemeint, das durch $\varphi(\vec{x}) \rightarrow 0$ für $\|\vec{x}\| \rightarrow \infty$ festgelegt wird.

/...2

Aufgabe 4.2

[8 Punkte]

- (a) Eine elektrostatische Ladungsdichteverteilung $\varrho(\vec{x})$ sei invariant unter einer räumlichen Galilei-Transformation \mathbf{G} (eine Galilei-Transformation besteht aus einer räumlichen Drehung und einer räumlichen Verschiebung), d.h. $\varrho(\mathbf{G}(\vec{x})) = \varrho(\vec{x})$. Ist dann das Potential $\varphi(\vec{x})$ auch invariant unter \mathbf{G} — unter der Voraussetzung, dass die Formel

$$(\#) \quad \varphi(\vec{x}) = \mathcal{K} \int \frac{\varrho(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} d^3y$$

(formal) anwendbar ist?

- (b) Welche Schwierigkeiten können sich bei Anwendung der Formel (#) ergeben, etwa für eine Ladungsdichte, die invariant bezüglich der Verschiebungen in einer festen Raumrichtung ist? Gibt es trotzdem ein translationsinvariantes Potential? Diskutieren Sie den Fall anhand eines geeigneten Beispiels.

Aufgabe 4.3

[8 Punkte]

Es sei eine Ladungsverteilung mit konstanter Ladungsdichte und konstanter Stromdichte gegeben,

$$\varrho(t, \vec{r}) = \varrho_0, \quad \vec{j}(t, \vec{r}) = j_0 \vec{e}_3,$$

mit geeigneten, von 0 verschiedenen Konstanten ϱ_0 und j_0 . Offenbar gilt dann die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

Es sei außerdem $\mathcal{V}(t)$ das zeitabhängige Volumen

$$\mathcal{V}(t) = \{ \vec{x} \mid x_1^2 + x_2^2 < R \text{ und } 0 < x_3 < ht \} \quad (t > 0)$$

mit gegebenen positiven Konstanten h und R . Berechnen Sie die Gesamtladung $Q(t)$ in $\mathcal{V}(t)$ und den Fluß $\mathcal{F}(\vec{j}_t, \partial\mathcal{V}(t))$ durch die Oberfläche von $\mathcal{V}(t)$ zur Zeit t . Gilt in diesem Fall $\dot{Q}(t) = -\mathcal{F}(\vec{j}_t, \partial\mathcal{V}(t))$?

Abgabe: Bis Di., 13.5..2014, vor Beginn des Übungsseminars.