Prof. Dr. R. Verch
Dr. J. Zahn

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Sommersemester 2015

Übungen zu TP2-Elektrodynamik (Staatsexamen Lehramt)
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 4.1 [12 Punkte]

Es sei $\mathcal{V}$ das Volumen, das gebildet wird durch den $\{x_3 > 0\}$-Teil der Kugel mit dem Radius R, die im Koordinatenursprung zentriert ist. Es sei außerdem das Vektorfeld

$$\vec{g}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0 x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben (dabei ist g_0 eine positive Konstante).
Weisen Sie für diese Situation die Gültigkeit des Satzes von Gauß nach, indem Sie jeweils

$$\int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \bullet \vec{g})(\vec{x})\, d^3x \qquad \text{und} \qquad \int_{\partial V} (\vec{g}(y) \bullet \vec{n}_O(y))\, d\sigma(y)$$

berechnen und zeigen, dass beide Ausdrücke dasselbe Ergebnis liefern.
Hinweis: Verwenden Sie Kugelkoordinaten

Aufgabe 4.2 [10 Punkte]

(a) Eine elektrostatische Ladungsdichteverteilung $\varrho(\vec{x})$ sei invariant unter einer räumlichen Galilei-Transformation $\mathbf{G}$ (eine Galilei-Transformation besteht aus einer räumlichen Drehung und einer räumlichen Verschiebung), d.h. $\varrho(\mathbf{G}(\vec{x})) = \varrho(\vec{x})$. Ist dann das Potential $\varphi(\vec{x})$ auch invariant unter $\mathbf{G}$ — unter der Voraussetzung, dass die Formel

$$(\sharp) \qquad\qquad \varphi(\vec{x}) = \mathcal{K} \int \frac{\varrho(\vec{y})}{||\vec{x} - \vec{y}||}\, d^3y$$

(formal) anwendbar ist?

(b) Welche Schwierigkeiten können sich bei Anwendung der Formel ($\sharp$) ergeben, etwa für eine Ladungsdichte, die invariant bezüglich der Verschiebungen in einer festen Raumrichtung ist? Gibt es auch in einem solchen Fall ein translationsinvariantes Potential? Diskutieren Sie den Fall anhand eines geeigneten Beispiels.

/...2

Aufgabe 4.3 [14 Punkte]

Es sei folgende elektrostatische Ladungsdichteverteilung gegeben:

$$\varrho(\vec{x}) = \begin{cases} 0 \;\; \text{für} \;\; 0 \leq ||\vec{x}\,|| < r \\ \varrho_0 \sin(||\vec{x}\,|| - r) \;\; \text{für} \;\; r \leq ||\vec{x}\,|| < r + \pi \\ 0 \;\; \text{für} \;\; r + \pi \leq ||\vec{x}\,|| < R \\ -\varrho_0 \sin(||\vec{x}\,|| - R) \;\; \text{für} \;\; R \leq ||\vec{x}\,|| < R + \pi \\ 0 \;\; \text{für} \;\; ||\vec{x}\,|| \geq R \end{cases}$$

Dabei ist ϱ_0 eine positive Konstante (Einheit: Ladungsdichte in MKSA) und r, R sind geeignete positive Konstanten (in Einheiten einer Länge).

(a) Zeigen Sie, dass das* Potential $\varphi(\vec{x})$ sich bei räumlichen Drehungen nicht ändert. Schließen (oder zeigen) Sie, dass $\varphi(\vec{x})$ nur von $||\vec{x}\,||$ abhängt.

(b) Skizzieren Sie den Verlauf von $\varrho(\vec{x})$ als Funktion von $||\vec{x}\,||$.

(c) Berechnen Sie $\varphi(\vec{x})$.

(d) Skizzieren Sie den Verlauf von $\varphi(\vec{x})$ als Funktion von $||\vec{x}\,||$.

* Potentiale von Ladungsverteilungen sind höchstens bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt. Hier ist das Potential gemeint, das durch $\varphi(\vec{x}) \to 0$ für $||\vec{x}\,|| \to \infty$ festgelegt wird.

Abgabe: Bis Montag, 11.05.2015, vor dem Übungsseminar