Prof. Dr. R. Verch
Dr. J. Zahn

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Sommersemester 2015

Übungen zu TP2-Elektrodynamik (Staatsexamen Lehramt)
Aufgabenblatt 3

In den folgenden Aufgaben sind $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ die kartesischen Basisvektoren, also

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 3.1

Ein eingebettetes Fächenstück $S = \vec{\chi}(G)$ sei beschrieben durch eine Einbettungsabbildung $\vec{\chi} : B \to \mathbb{R}^3$, die folgendermaßen definiert ist:

- $G = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (R/2)^2 < u^2 + v^2 < R^2\}$. Dabei ist $R > 0$ eine Konstante.
- $B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (R/3)^2 < u^2 + v^2 < (2R)^2\}$.
- $\vec{\chi}(u, v) = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + (u^2 + v^2)\vec{e}_3$.

Die ebenen Polarkoordinaten beschreiben jeden Punkt (u, v) des $\mathbb{R}^2$ mit $r \geq 0$ und $\phi \in [0, 2\pi)$ durch

$$u = r\cos(\phi) , \qquad v = r\sin(\phi) .$$

(a) Finden Sie eine Einbettungsabbildung $\vec{\xi} = \vec{\xi}(r, \phi)$, die von den ebenen Polarkoordinaten (r, ϕ) abhängt und die ebenfalls das eingebettete Flächenstück beschreibt, d.h. finden Sie geeignete Teilmengen $\tilde{B}$ und $\tilde{G}$ von $[0, \infty) \times [0, 2\pi)$ und eine Einbettungsabbildung $\vec{\xi} : \tilde{B} \to \mathbb{R}^3$ so, dass $S = \vec{\xi}(\tilde{G})$.

(b) Berechnen Sie

(i) $\frac{\partial}{\partial u}\vec{\chi}(u, v)$, $\frac{\partial}{\partial v}\vec{\chi}(u, v)$, $\frac{\partial}{\partial u}\vec{\chi}(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v}\vec{\chi}(u, v)$

(ii) $\frac{\partial}{\partial r}\vec{\xi}(r, \varphi)$, $\frac{\partial}{\partial \phi}\vec{\xi}(r, \phi)$, $\frac{\partial}{\partial r}\vec{\xi}(r, \phi) \times \frac{\partial}{\partial \phi}\vec{\xi}(r, \phi)$

/...2

Aufgabe 3.2
Die räumlichen Kugelkoordinaten sind

$$x_1 = r\sin(\theta)\cos(\varphi)\,, \quad x_2 = r\sin(\theta)\sin(\varphi)\,, \quad x_3 = r\cos(\theta)\,, \quad (r \geq 0\,, 0 \leq \theta < \pi\,, -\pi \leq \varphi < \pi)\,.$$

(a) Prüfen Sie, ob das Vektorfeld $\vec{D}(\vec{x})$, das bzgl. Kugelkoordinaten ausgedrückt wird durch

$$\vec{D}(r,\theta,\varphi) = r\cos(\theta)\vec{e}_1 + r^2\vec{e}_2 + \sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{e}_3\,,$$

ein Gradientenvektorfeld sein kann.

(b) Die Kurve $\vec{c}$ sei die Randkurve des im Ursprung der $\{x_3 = 0\}$-Ebene zentrierten Quadrats mit der Kantenlänge ℓ. Die Kurve sei so orientiert, dass der Einheitsvektor in x_3-Richtung einen rechtshändig orientierten Normalenvektor des Quadrats bildet. Berechnen Sie

$$\int_{\vec{c}} (\vec{F} \bullet d\vec{c})$$

für das bzgl. Kugelkoordinaten angegebene Vektorfeld

$$\vec{F}(r,\theta,\varphi) = r(\cos(\theta)+\sin(\theta)\sin(\varphi))\vec{e}_1 + r(\cos(\theta)+\sin(\theta)\cos(\varphi))\vec{e}_2 + r\sin(\theta)(\cos(\varphi)+\sin(\varphi))\vec{e}_3$$

Hinweis: Es ist empfehlenswert, zunächst die Rotation der Vektorfelder zu bestimmen.

Aufgabe 3.3
Es sei S das in den $\mathbb{R}^3$ eingebettete Flächenstück, das gegeben ist als der $\{x_3 > 0\}$-Teil der Oberfläche der Kugel mit Radius R, die im Koordinatenursprung zentriert ist. Die Randkurve von S ist gegeben durch

$$\vec{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3\,, \quad \vec{c}(\phi) = R\cos(\phi)\vec{e}_1 + R\sin(\phi)\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

Gegeben ist außerdem das Vektorfeld

$$\vec{f}(\vec{x}) = f_0 x_2 \vec{e}_1 - f_0 x_1 \vec{e}_2 + f_1 x_3 \vec{e}_3$$

mit positiven (ggf. dimensionsbehafteten) Konstanten f_0 und f_1.
Weisen Sie für diese Situation die Gültigkeit des Satzes von Stokes nach, indem Sie jeweils

$$\int_S ((\vec{\nabla} \times \vec{f})(y) \bullet \vec{n}_S(y))\, d\sigma(y) \qquad \text{und} \qquad \int_{\vec{c}} (\vec{f} \bullet d\vec{c})$$

berechnen und zeigen, dass beide Ausdrücke dasselbe Ergebnis liefern.
Hinweis: Verwenden Sie Kugelkoordinaten.

Wert jeder Aufgabe: 12 Punkte. Abgabe bis Montag, 04.05.2015, vor dem Übungsseminar.