Prof. Dr. R. Verch
Dr. K. Schiele

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2013/14

Übungen zu TP1-Staatsexamen Lehramt
Große Hausaufgabe

Das Erreichen von 50% (entsprechend 20 Punkten) der Punkte der Großen Hausaufgabe ist erforderlich für die Zulassung zur Klausur (Modulprüfung). Die Abgabefrist für die Bearbeitungen endet am Montag, 20.01.2014, zu Beginn des Übungsseminars.

A - Fragen zum Inhalt der Vorlesung (und der Übungen). Beantworten Sie die folgenden Fragen knapp aber möglichst treffend. Verwenden Sie Formeln und Skizzen. Erklären Sie die Bedeutung der Formelsymbole. Die Antwort einer Frage soll nicht mehr als eine Seite in Anspruch nehmen. Wenn Beweise von Sachverhalten erbracht werden sollen, so wird dies in der Frage betont.

Der Wert jeder Frage beträgt 4 Punkte.

(A.1) Was ist der Runge-Lenz-Vektor? Unter welchen Bedingungen ist er eine Erhaltungsgröße, und welche Konsequenzen hat dies für die Bahnkurven der Planeten im Sonnensystem?

(A.2) Erläutern Sie (mit Beweis) den Energiesatz für ein massives Teilchen, das der Newtonschen Bewegungsgleichung genügt und sich in einem konservativen Kraftfeld bewegt.

(A.3) Wie ist der Gesamtdrehimpuls eines Systems aus N Teilchen definiert? Unter welchen Bedingungen ist er eine Erhaltungsgröße?

(A.4) Welche Situation bezeichnet man als elastischen Stoß von materiellen Objekten? Was ist dagegen ein inelastischer Stoß? Welche Größen sind beim elastischen Stoß zweier ideal harter Kugeln erhalten?

/...2

B - zu lösende Aufgaben

Lösen Sie zwei der folgenden 4 Aufgaben. Wenn Sie mehr als 2 Aufgaben bearbeiten, werden nur die besten 2 Bearbeitungen für die Gesamtpunktzahl gezählt.

(B.1) [12 Punkte]

Die Matrix $\underline{\underline{D}}(3,\theta)$ ist für $\theta \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$\underline{\underline{D}}(3,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(\underline{\underline{D}}(3,\theta)\vec{x} \bullet \underline{\underline{D}}(3,\theta)\vec{y}) = (\vec{x} \bullet \vec{y})\,.$$

(b) Berechnen Sie $\underline{\underline{D}}(3,\theta)\vec{x}$ für die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und benutzen Sie die Ergebnisse, um anhand einer Skizze (für geeignete Wahl von θ) darzustellen, dass die Matrix $\underline{\underline{D}}(3,\theta)$ einer Drehung um die $\vec{e}_3$-Achse um den Winkel θ entspricht.

(B.2) [12 Punkte]

Eine Rakete wird in einem Inertialsystem durch das entgegen ihrer Bewegungsrichtung ausströmende Verbrennungsgas beschleunigt. Die Masse der Rakete sei M_0, wenn das Raketentriebwerk gestartet wird (mit vollem Treibstoffvorrat) und M_f bei Brennschluss (wenn der Treibstoffvorrat erschöpft ist). Die konstante Ausströmgeschwindigkeit des Verbrennungsgases sei v_G. Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v_{R,f}$ der Rakete nach Brennschluss. Nehmen Sie dabei an, dass die Bewegung der Rakete entlang einer festen Richtung erfolgt, dass die Rakete anfangs im Inertialsystem ruht und dass keine äußeren Kräfte wirken.

Hinweis:

- Das Problem sollte so angesehen werden, dass es ein Gesamtsystem gibt, das zur Zeit t aus zwei Untersystemen besteht: Das Untersystem bestehend aus dem bis zur Zeit t ausgeströmten Verbrennungsgas, mit Impuls $\vec{p}_G(t)$, und dem Untersystem der Rakete mit dem zur Zeit t noch verbleibenden Treibstoff, mit Impuls $\vec{p}_R(t)$.
- Für das Gesamtsystem gilt zu jeder Zeit Erhaltung des Gesamtimpulses (warum?) und Erhaltung der Gesamtmasse.
- Mit Hilfe von v_G lässt sich die zeitliche Änderungsrate von $\vec{p}_G(t)$ ausdrücken. Zusammen mit den Erhaltungssätzen führt dies auf eine Gleichung, aus der sich schliesslich $v_{R,f}$ durch Integration bestimmen lässt.

/...3

(B.3) [12 Punkte]

(a) Ein Planet sei vereinfacht beschrieben als eine Kugel mit Radius R und homogener Massenverteilung der Gesamtmasse M. Zeigen Sie, dass das von dem Planeten im Außenraum hervorgerufene Gravitationsfeld übereinstimmt mit dem Gravitationsfeld, das eine idealisiert im Mittelpunkt des Planeten punktförmig konzentrierte Masse M erzeugen würde.

(b) Nehmen Sie an, dass die Massendichte des Planeten beschrieben wird durch eine stetige Funktion $\varrho(r) \geq 0$, wobei $r \in [0, R]$ der Abstand vom Mittelpunkt des Planeten ist. Gilt die Aussage, die in (a) gezeigt werden soll, dann auch?

(c) Nehmen Sie an, dass der Außenraum einer leeren Kugel mit dem Radius R mit einer sphärisch symmetrischen Massenverteilung (mit Massendichte $\varrho(r) \geq 0$, wobei $r > R$ der Abstand vom Mittelpunkt der Hohlkugel) erfüllt ist ("Hohlwelt"). Welches Gravitationsfeld ergibt sich im Innenraum der Kugel?

(B.4) [12 Punkte]

Ein Hagelkorn (eine Eiskugel von $R = 1\text{cm}$ Radius) fällt aus 1km Höhe. Das Korn wird durch die Gravitationskraft beschleunigt und durch die Reibungskraft

$$\vec{F}_{\mathtt{Rei}} = -\tfrac{1}{2} C_W \pi R^2 \varrho_L \dot{\vec{r}}\,|\dot{\vec{r}}|$$

gebremst, wobei ϱ_L die Luftdichte und $C_W \simeq 0,5$ den Luftwiderstandskoeffizienten bezeichnen. Stellen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung auf mit der Anfangsbedingung, dass das Hagelkorn bei $t = 0$ ruht. Lösen Sie das Anfangswertproblem der Newtonschen Bewegungsgleichung und bestimmen Sie die Geschwindigkeit, mit der das Hagelkorn auf die Erdoberfläche trifft. (Sie dürfen eine asymptotische Form der Bahnkurve zur Bestimmung der Flugzeit benutzen.) Wie verhält sich die Auftreffgeschwindigkeit bei Variation von R, z.B. wenn R verdoppelt wird? [Von Effekten, die von der Erdrotation herrühren, soll abgesehen werden.]