
Übungen zu TP1-Staatsexamen Lehramt
Aufgabenblatt 11

Aufgabe 11.1

Acht (punktartig idealisierte) Massen seien an den Ecken eines rechtwinkligen Würfels der Kantenlänge $2m$ starr angeordnet. Der Würfel sei im Ursprung eines (körperfesten) kartesischen Koordinatensystems zentriert, die Koordinaten-Längeneinheit betrage $1m$. Die Massen an den Punkten mit den (x, y, z) -Koordinaten $(1, 1, 1)$ und $(-1, -1, -1)$ sollen jeweils $20kg$ betragen, die an den übrigen Eckpunkten des Würfels jeweils $5kg$.

- (a) Berechnen Sie Koordinaten des Schwerpunkts der Massenordnung.
- (b) Bestimmen Sie den Trägheitstensor (bezogen auf den Schwerpunkt und bzgl. der zugrundeliegenden Koordinatenrichtungen) für die Massenordnung.
- (b) Ermitteln Sie die Hauptträgheitsmomente (die Eigenwerte des Trägheitstensors) und die Hauptträgheitsachsen (die Eigenvektoren des Trägheitstensors).

Aufgabe 11.2

Ein Rad sei bzgl. eines körperfesten Koordinatensystems beschrieben durch die Massenverteilung

$$\tilde{\rho}(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0, & \text{falls } r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2 \text{ und } -a \leq z \leq a, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $0 < r < R$ und $a > 0$ vorgegebene Längen sind, und $\rho_0 > 0$ eine konstante Massendichte. Hier seien die Längen folgendermaßen gewählt: $R = 0,6m$, $r = 0,5m$, $a = 0,1m$. Das Rad habe eine Masse von $20kg$. Das Rad befinde sich anfangs auf einer Höhe $h = 10m$ über dem Erdboden in Ruhe. Es rolle dann eine schräge Bahn bis zum Erdboden hinunter. Anschließend rollt es auf dem (ebenen) Erdboden weiter. Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich der Schwerpunkt des Rades dabei fortbewegt.

Hinweis: Es wird angenommen, dass das Rad rollt ohne zu gleiten, und dass Rollreibung vernachlässigbar ist. Weiter wird angenommen, dass das Rad senkrecht auf der Unterlage steht und die Bewegung effektiv in einer Ebene erfolgt, die zum Erdboden und zur Drehachse des Rades senkrecht verläuft.

/...2

Aufgabe 11.3

Es sei der Trägheitstensor $J = (J_{k\ell})$ eines starren Körpers definiert bezüglich eines körperfesten Bezugssystems $(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3)$, das im Schwerpunkt des starren Körpers zentriert ist. Der Trägheitstensor $J' = (J'_{k\ell})$ sei bezüglich eines körperfesten Bezugssystems $(\vec{\eta}'_1, \vec{\eta}'_2, \vec{\eta}'_3)$ definiert, das gegenüber $(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3)$ starr verschoben ist, also $\vec{\eta}'_j = \vec{\eta}_j + \vec{a}$ mit einem festen Vektor \vec{a} . (D.h. das Bezugssystem $(\vec{\eta}'_1, \vec{\eta}'_2, \vec{\eta}'_3)$ ist nicht im Schwerpunkt des starren Körpers zentriert.) Zeigen Sie, dass der *Satz von Steiner* gilt:

$$J'_{k\ell} = J_{k\ell} + M(|\vec{a}|^2 \delta_{k\ell} - a_k a_\ell),$$

wobei M die Gesamtmasse des starren Körpers ist.

Wert jeder Aufgabe: 12 Punkte.

Abgabe: Bis Montag, den 03.02.2014, vor Beginn des Übungsseminars.