Prof. Dr. R. Verch
Dr. K. Schiele

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2013/14

Übungen zu TP1-Staatsexamen Lehramt
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 7.1

Zwei idealisiert punktartige Massen m und M bewegen sich unter dem Einfluss einer gegenseitigen konservativen Zentralkraft mit dem Potential $U(r)$, $r = ||\vec{r}||$, wobei $\vec{r}$ der Vektor der Relativbewegung ist.

(a) Der Drehimpuls einer finiten Bahnkurve $\vec{r}(t)$ sei $\vec{\ell} = \ell\vec{e}_3$, $\ell > 0$. Zeigen Sie, dass für die Perihelverschiebung der Bahnkurve die (in der VL ohne Beweis angegebene) Formel

$$\Delta\varphi = 2\int_{\tilde{r}_{min}}^{\tilde{r}_{max}} \frac{\ell}{r^2[E - U_{\text{eff},\ell}(r)]^{1/2}}\, dr$$

gültig ist. Dabei ist E die Gesamtenergie der Bahnkurve und $U_{\text{eff},\ell}(r)$ ist das effektive Potential.

Hinweis: In der Vorlesung wurde für das Newtonsche Potential eine Differentialgleichung angegeben für $\tilde{r}(\varphi)$, den Bahnradius in Abhängigkeit vom Polarwinkel φ. Argumentieren Sie analog für ein allgemeines Potential und ermitteln Sie daraus eine Differentialgleichung für den Polarwinkel in Abhängigkeit des Bahnradius.

(b) Betrachten Sie das Zentralpotential

$$U(r) = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \quad (r > 0)\,,$$

wobei A und B positive reelle Konstanten (in geeigneten Einheiten) sind, und berechnen Sie die Perihelverschiebung $\Delta\varphi$ für in Abhängigkeit von A und B.

Aufgabe 7.2

Zwei idealisiert punktartige Massen m und M bewegen sich unter dem Einfluss einer gegenseitigen konservativen Zentralkraft mit dem Potential $U(r)$, $r = ||\vec{r}||$, wobei $\vec{r}$ der Vektor der Relativbewegung ist.
Der *Runge-Lenz-Vektor* der Bahnkurve der Relativbewegung wird definiert als

$$\vec{A} = \mu\dot{\vec{r}} \times \vec{\ell} + \mu U(r)\vec{r}\,.$$

Dabei ist μ die reduzierte Masse des Zweiteilchensystems und $\vec{\ell}$ der Drehimpuls der Bahnkurve.

/...2

(a) Zeigen Sie für den Fall des *Newtonschen Potentials*

$$U(r) = -\frac{\kappa}{r} \quad (r > 0\,, \quad \kappa \text{ eine positive Konstante in geeign. Einheiten})\,,$$

dass $\vec{A}$ für Lösungen der Bewegungsgleichung zeitlich konstant ist.

(b) Interpretieren Sie $\vec{A}$ für finite Bahnkurven geometrisch und erläutern Sie, weshalb zeitlich konstantes $\vec{A}$ bedeutet, dass keine Periheldrehung auftritt.

(c) Zeigen Sie, dass i.a. für Potentiale $U(r)$, die nicht von der Form des Newtonschen Potentials sind, der Runge-Lenz-Vektor $\vec{A}$ nicht zeitlich konstant ist.

Aufgabe 7.3

Es sei ein System aus N Teilchen mit Massen $m_{(j)}$ und Bahnkurven $\vec{r}_{(j)}(t)$ gegeben. Wenn $G(t)$ eine mechanische Größe des Systems zur Zeit t ist, dann nennt man

$$\overline{G} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} G(t)\, dt$$

das *zeitliche Mittel* von G (sofern der Limes existiert).
Gehen Sie davon aus, dass es ein Potential $U(\vec{r}_{(1)}, \ldots, \vec{r}_{(N)})$ gibt, so dass die Kraft auf das j-te Teilchen gegeben ist durch $\vec{F}_{(j)} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_{(j)}} U(\vec{r}_{(1)}, \ldots, \vec{r}_{(N)})$.
Für Bahnkurven $\vec{r}_{(j)}(t)$, die Lösungen der Bewegungsgleichungen sind, sei definiert: $T(t) =$ gesammte kinetische Energie des Teilchensystems und $\vec{F}_{(j)}(t) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_{(j)}} U(\vec{r}_{(1)}(t), \ldots, \vec{r}_{(N)}(t))$.
Nehmen Sie an, dass die Bahnkurven für alle Zeiten in einem festen, endlichen Raumbereich bleiben und dass die Geschwindigkeiten aller Teilchen für alle Zeiten einen fest vorgegebenen Wert nicht überschreiten. Zeigen Sie, dass unter diesen Annahmen der *Virialsatz* gilt:

$$2\overline{T} = -\overline{\sum_{j=1}^{N} (\vec{r}_{(j)} \bullet \vec{F}_{(j)})}\,.$$

Was folgt spezieller in dem Fall, dass U homogen ist vom Grade s, d.h. dass für jedes $\lambda > 0$ gilt

$$U(\lambda \vec{r}_{(1)}, \ldots, \lambda \vec{r}_{(N)}) = \lambda^s U(\vec{r}_{(1)}, \ldots, \vec{r}_{(N)}) \ \ ?$$

Wert jeder Aufgabe: 12 Punkte

Abgabe: Am 09.12.2013, vor Beginn des Übungsseminars.