Prof. Dr. R. Verch
Dr. K. Schiele

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2013/14

Übungen zu TP1-Staatsexamen Lehramt
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 6.1

(a) Ein Planet sei vereinfacht beschrieben als eine Kugel mit Radius R und homogener Massenverteilung der Gesamtmasse M. Zeigen Sie, dass das von dem Planeten im Außenraum hervorgerufene Gravitationsfeld übereinstimmt mit dem Gravitationsfeld, das eine idealisiert im Mittelpunkt des Planeten punktförmig konzentrierte Masse M erzeugen würde.

(b) Nehmen Sie an, dass die Massendichte des Planeten beschrieben wird durch eine stetige Funktion $\varrho(r) \geq 0$, wobei $r \in [0, R]$ der Abstand vom Mittelpunkt des Planeten ist. Gilt die Aussage, die in (a) gezeigt werden soll, dann auch?

(c) Nehmen Sie an, dass der Außenraum einer leeren Kugel mit dem Radius R mit einer sphärisch symmetrischen Massenverteilung (mit Massendichte $\varrho(r) \geq 0$, wobei $r > R$ der Abstand vom Mittelpunkt der Hohlkugel) erfüllt ist ("Hohlwelt"). Welches Gravitationsfeld ergibt sich im Innenraum der Kugel?

Aufgabe 6.2

Das Raumschiff der Astronautin Sandy befindet sich auf einer Umlaufbahn um die Erde, deren höchster Punkt (Apogäum) 1000 km und deren tiefster Punkt (Perigäum) 300 km über der Erdoberfläche liegen. Als Sandy sich gerade außerhalb des Raumschiffs aufhält, bemerkt sie mit Schrecken, dass ihr Raumschiff vom Trümmerteil eines Satelliten getroffen wird. Dieser Zusammenstoß ereignet sich genau am tiefsten Punkt der Umlaufbahn des Raumschiffs. Nehmen Sie an, dass sich das Trümmerteil unmittelbar vor dem Zusammenstoß mit genau der entgegengesetzten Geschwindigkeit des Raumschiffs bewegt (die Beträge der Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Zusammenstoß sind also gleich) und dass die Masse des Trümmerteils ein Zehntel der Raumschiffmasse beträgt. Stürzt der entstehende Klumpen Weltraumschrott aus Raumschiff und Trümmerteil auf die Erde?

Hinweise:

(i) Die Erde wird näherungsweise als in einem Inertialsystem ruhend betrachtet.

(ii) Von allen durch die Erdatmosphäre bedingten Effekten soll abgesehen werden.

(iii) Sie können benutzen, dass das Gravitationspotential außerhalb des Erdradius durch ein Newtonsches Zentralpotential beschrieben wird (vgl. Aufgabe 6.1 (a)). Wenden Sie Erhaltungssätze für diese Situation an.

/...2

(iv) Der Zusammenstoß von Raumschiff und Trümmerteil soll idealisiert als zentraler inelastischer Stoß beschrieben werden. Sie können benutzen, dass die Geschwindigkeit eines Objekts, das beim zentralen inelastischen Stoß zweier Massen m_1 und m_2 mit den jeweiligen Geschwindigkeiten $\vec{v}_{(1)}$ und $\vec{v}_{(2)} = \alpha\vec{v}_{(1)}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) entsteht, gegeben ist durch

$$\vec{v} = \left(\frac{m_1 + \alpha m_2}{m_1 + m_2}\right)\vec{v}_{(1)}\,.$$

Aufgabe 6.3

Für ein (stetig differenzierbares) Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ F_3(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

gegeben auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ wird definiert:

$$\operatorname{div}\vec{F}(\vec{x}) = (\vec{\nabla} \bullet \vec{F})(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(\vec{x}) \quad \textit{Divergenz} \text{ von } \vec{F}\,.$$

Für eine (zweimal stetig differenzierbare) $\mathbb{R}$-wertige Funktion $f(\vec{x})$ gegeben auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ wird definiert:

$$\Delta f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(\vec{x}) \quad \textit{Laplace-Operator}\,.$$

Für ein (zweimal stetig differenzierbares) Vektorfeld $\vec{F}$ wird $\Delta\vec{F}$ definiert als das Vektorfeld mit den Koordinatenkomponenten ΔF_j, $j = 1, 2, 3$.

Überprüfen Sie die folgenden Beziehungen für Vektorfelder $\vec{F}$ und $\vec{G}$ sowie $\mathbb{R}$-wertige Funktionen f und g (beliebig hoher Grad an Differenzierbarkeit darf vorausgesetzt werden):

(1) $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$

(2) $\operatorname{div}(f\vec{F}) = f\operatorname{div}\vec{F} + ((\vec{\nabla}f) \bullet \vec{F})$

(3) $(\vec{\nabla} \bullet (\vec{F} \times \vec{G})) = ((\vec{\nabla} \times \vec{F}) \bullet \vec{G}) - (\vec{F} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{G}))$

(4) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\operatorname{div}\vec{F}) - \Delta\vec{F}$

(5) $\operatorname{div}(\vec{\nabla}f) = \Delta f$

Wert jeder Aufgabe: 12 Punkte

Abgabe: Wegen Dies Academicus am 02.12: Am Di., 03.12.2013, vor Beginn der VL.