
Übungen zu TP1-Staatsexamen Lehramt
Aufgabenblatt 2

Aufgabe 2.1

(a)

Das OBS $(P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, t)$ sei ein Inertialsystem. Ein weiteres OBS $(P', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, t')$ sei so beschaffen, dass $t'(t) = t^2$ gilt. Ist $(P', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, t')$ ein Inertialsystem?

(b)

Das OBS $(P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, t)$ sei ein Inertialsystem, und $\vec{r}(t)$ sei die Bahnkurve eines materiellen Objekts. Der 3-dimensionalen Bahnkurve $\vec{r}(t)$ kann eine *Weltlinie* $\gamma(t)$ zugeordnet werden, die neben den 3 räumlichen Koordinatenkomponenten $r_1(t), r_2(t), r_3(t)$ der Bahnkurve auch die Zeitkomponente enthält:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \\ t \end{pmatrix}$$

Somit ist eine Weltlinie eine Abbildung von einem Zeitintervall in den \mathbb{R}^4 .

Wählen Sie das Inertialsystem derart, dass die Sonne in P ruht, und zeichnen Sie skizzenhaft (nicht massstabsgetreu) die Weltlinien von Erde und Mond für eine Zeitspanne von 12 Monaten, wobei Sie

- die Zeitkomponentenachse (entsprechend dem Basisvektor \vec{e}_4 des \mathbb{R}^4) als *vertikale* Achse nehmen (Zeitverlauf von unten nach oben)
- eine räumliche Dimension in der Darstellung unterdrücken, indem Sie annehmen, dass die Bahnen von Erde und Mond in einer festen räumlichen Ebene verlaufen (die dazu senkrechte Richtung wird nicht dargestellt), die von \vec{e}_1 und \vec{e}_2 aufgespannt wird.

/...2

Aufgabe 2.2

Für die Bahnkurven $\vec{r}(t)$ und $\vec{r}'(t)$ eines beliebigen materiellen Objekts bezüglich zweier (absolut zeitparametrisierter) Inertialsysteme gilt

$$(\star) \quad \vec{r}'(t) = \underline{\underline{D}}\vec{r}(t) + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

mit einer 3×3 Drehmatrix $\underline{\underline{D}}$ und Vektoren \vec{v}_0 und \vec{r}_0 .

(a)

Die Koordinatenvektoren \vec{x} und \vec{x}' sollen denselben räumlichen Punkt bezüglich der beiden Koordinatensysteme entsprechen. Zeigen Sie, dass der Zusammenhang (\star) dann dargestellt werden kann durch

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & v_{01} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & v_{02} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & v_{03} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{01} \\ r_{02} \\ r_{03} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b)

Für eine 3×3 Drehmatrix $\underline{\underline{D}}$ und Vektoren \vec{v}_0, \vec{r}_0 in \mathbb{R}^3 wird definiert

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{G}}(\underline{\underline{D}}, \vec{v}_0) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & v_{01} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & v_{02} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & v_{03} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{g}} = \underline{\underline{g}}(\vec{r}_0) = \begin{pmatrix} r_{01} \\ r_{02} \\ r_{03} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Abbildung $T_{(\underline{\underline{G}}, \underline{\underline{g}})} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$T_{(\underline{\underline{G}}, \underline{\underline{g}})} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & v_{01} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & v_{02} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & v_{03} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{01} \\ r_{02} \\ r_{03} \\ 0 \end{pmatrix}$$

wird *Galilei-Transformation* genannt. Zeigen Sie, dass die Galilei-Transformationen eine Gruppe bilden (unter der Komposition von Abbildungen). Weisen Sie dazu nach, dass

$$T_{(\underline{\underline{G}}_1, \underline{\underline{g}}_1)} \circ T_{(\underline{\underline{G}}_2, \underline{\underline{g}}_2)} = T_{(\underline{\underline{G}}_1 \cdot \underline{\underline{G}}_2, \underline{\underline{G}}_1 \underline{\underline{g}}_1 + \underline{\underline{g}}_2)}$$

gilt, und bestimmen Sie das neutrale Element der Gruppe und das Inverse zu $T_{(\underline{\underline{G}}, \underline{\underline{g}})}$. Erläutern Sie die physikalische Bedeutung des inversen Elements (vgl. Teil (a)).

Werte der Aufgaben: Aufgabe 2.1 = 12 Punkte, Aufgabe 2.2 = 24 Punkte

Abgabe: Bis Montag, 03.11.2013, vor Beginn des Übungsseminars.