
Miniscript:
Mathematische Begriffe und Sachverhalte (TP1-L)

1.) Der Vektorraum \mathbb{R}^3

\mathbb{R}^3 ist der Raum aller 3-dimensionalen Spaltenvektoren mit reellen Einträgen,

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3 \right\}$$

Vektorsumme:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

dann:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation mit Zahlen:

$$a\vec{x} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ ax_3 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

dann:

$$a\vec{x} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ ax_3 \end{pmatrix}.$$

Für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} a(\vec{x} + \vec{y}) &= a\vec{x} + a\vec{y} \\ \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) &= (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} \\ \vec{x} + \vec{y} &= \vec{y} + \vec{x} \\ \vec{0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{0} + \vec{x} = \vec{x} + \vec{0} = \vec{x} \\ -\vec{x} &= (-1)\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} - \vec{x} = \vec{x} + (-1)\vec{x} = \vec{0} \end{aligned}$$

Damit erfüllt \mathbb{R}^3 die Axiome eines 3-dimensionalen, reellen Vektorraums.

Bemerkung: Das verallgemeinert unmittelbar von \mathbb{R}^3 auf den Fall von \mathbb{R}^n für jedes $n \in \mathbb{N}$, d.h. den Raum der n -dimensionalen Spaltenvektoren mit reellen Einträgen. Entsprechend verallgemeinert alles, was im Folgenden für den \mathbb{R}^3 dargestellt wird, auf den \mathbb{R}^n , sofern nichts anderes dazu vermerkt wird.

2.) Euklidisches Skalarprodukt und Norm

Für

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

ist das **Euklidische Skalarprodukt** definiert durch

$$(\vec{x} \bullet \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \sum_{j=1}^3 x_jy_j.$$

Das Skalarprodukt hat die folgenden Eigenschaften für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (\vec{x} \bullet \vec{y}) &= (\vec{y} \bullet \vec{x}) \\ a(\vec{x} \bullet \vec{y}) &= (a\vec{x} \bullet \vec{y}) = (\vec{x} \bullet (a\vec{y})) \\ (\vec{x} \bullet (\vec{y} + \vec{z})) &= (\vec{x} \bullet \vec{y}) + (\vec{x} \bullet \vec{z}) \\ ((\vec{x} + \vec{y}) \bullet \vec{z}) &= (\vec{x} \bullet \vec{z}) + (\vec{y} \bullet \vec{z}) \\ (\vec{x} \bullet \vec{x}) &= 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \end{aligned}$$

Die **Euklidische Norm** (oder: geometrische Länge) von $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x} \bullet \vec{x})}.$$

Es gilt für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \|a\vec{x}\| &= |a| \cdot \|\vec{x}\| \\ \|\vec{x} + \vec{y}\| &\leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \\ \|\vec{x}\| = 0 &\implies \vec{x} = \vec{0} \\ |(\vec{x} \bullet \vec{y})| &\leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \quad (\text{Cauchy-Schwarzsche Ungleichung}) \end{aligned}$$

Bei der Dreiecksungleichung und bei der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt Gleichheit dann und nur dann, wenn $\vec{y} = a\vec{x}$ oder $\vec{x} = a'\vec{y}$ mit $a, a' \in \mathbb{R}$ gilt. (Insbesondere, wenn $\vec{x} = \vec{0}$ oder $\vec{y} = \vec{0}$.)

Für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$|(\vec{x} \bullet \vec{y})| = \cos(\alpha(\vec{x}, \vec{y})) \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

wobei $\alpha(\vec{x}, \vec{y})$ der spitzere Winkel ($\leq 90^\circ$) zwischen \vec{x} und \vec{y} ist.

Wenn $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$, dann sind \vec{x} und \vec{y} genau dann zueinander **orthogonal** ($\vec{x} \perp \vec{y}$), wenn $(\vec{x} \bullet \vec{y}) = 0$:

$$(\vec{x} \bullet \vec{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \perp \vec{y}.$$

3.) Orthonormalbasen

Ein Satz $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ von Vektoren im \mathbb{R}^3 heißt **Orthonormalbasis** (kurz: ONB), falls

$$(*) \quad \|\vec{w}_j\| = 1 \quad (j = 1, 2, 3) \quad \text{und} \quad (\vec{w}_1 \bullet \vec{w}_2) = 0, \quad (\vec{w}_2 \bullet \vec{w}_3) = 0, \quad (\vec{w}_3 \bullet \vec{w}_1) = 0.$$

Die Bedingungen in (*) sind äquivalent zu

$$(\vec{w}_j \bullet \vec{w}_k) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, 3),$$

wobei δ_{jk} das **Kronecker-Delta Symbol** ist, definiert als

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$$

Jeder Vektor \vec{x} lässt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination einer ONB schreiben: Für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^3 (\vec{w}_j \bullet \vec{x}) \vec{w}_j.$$

Die **Standard-ONB** des \mathbb{R}^3 wird bezeichnet mit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, definiert durch

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.) Lineare Abbildungen und Matrizen

Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt **linear**, wenn für all $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$T(a\vec{x} + b\vec{y}) = aT(\vec{x}) + bT(\vec{y}).$$

Bei linearen Abbildungen schreibt man oft $T\vec{x}$ anstelle von $T(\vec{x})$.

Eine reelle 3×3 **Matrix** ist eine quadratische Zahlenanordnung mit reellen Einträgen:

$$\underline{A} = (A_{jk})_{j,k=1}^3 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Linker Index (j): **Zeilenindex** Rechter Index (k): **Spaltenindex**

Die Anwendung von *links* der Matrix \underline{A} auf $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ergibt ein $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ in \mathbb{R}^3 ,

$$\vec{y} = \underline{A}\vec{x}, \quad \text{definiert durch} \quad y_j = \sum_{k=1}^3 A_{jk}x_k.$$

Aus der Definition folgt für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\underline{A}(a\vec{x} + b\vec{y}) = a\underline{A}\vec{x} + b\underline{A}\vec{y},$$

d.h. die Multiplikation von Vektoren mit einer Matrix ist eine lineare Abbildung.

Jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ läßt sich durch die Matrix $\underline{T} = (T_{jk})_{j,k=1}^3$ mit den Einträgen

$$T_{jk} = (\vec{e}_j \bullet T(\vec{e}_k))$$

darstellen:

$$T(\vec{x}) = \underline{T}\vec{x} \quad \text{für alle} \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Mit dieser Beziehung zwischen linearen Abbildungen T und Matrizen \underline{T} entspricht die Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen dem Matrixprodukt.

Für zwei 3×3 Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix},$$

ist das **Matrixprodukt** $\underline{A} \cdot \underline{B}$ wieder eine 3×3 -Matrix,

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{C}, \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

definiert durch

$$C_{jk} = \sum_{i=1}^3 A_{ji} B_{ik}.$$

Wenn $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zwei lineare Abbildungen sind und

$$\underline{T} = ((\vec{e}_j \bullet T(\vec{e}_k))_{j,k=1}^3), \quad \underline{L} = ((\vec{e}_j \bullet L(\vec{e}_k))_{j,k=1}^3)$$

die zugehörigen Matrizen bezüglich der Standard-Basis von \mathbb{R}^3 , dann gilt für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$T(L(\vec{x})) = (\underline{T} \cdot \underline{L})\vec{x} = \underline{T}(\underline{L}\vec{x}).$$

Achtung: Das Matrixprodukt ist **nicht kommutativ**, d.h. im allgemeinen (außer für spezielle Matrizen) gilt

$$\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A} \quad !$$

Ähnlich wie bei Vektoren \vec{x} kann man auch für Matrizen Linearkombinationen durch die Linearkombinationen der jeweiligen Eintragskomponenten bilden, also für $a, b \in \mathbb{R}^3$ und Matrizen $\underline{A}, \underline{B}$:

$$a\underline{A} + b\underline{B} = (aA_{jk} + bB_{jk})_{j,k=1}^3.$$

Mit dieser Definition gilt dann für alle $a, b \in \mathbb{R}$, Vektoren \vec{x} und Matrizen $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$:

$$\begin{aligned} (a\underline{A} + b\underline{B})\vec{x} &= a\underline{A}\vec{x} + b\underline{B}\vec{x} \\ (a\underline{A} + b\underline{B}) \cdot \underline{C} &= a\underline{A} \cdot \underline{C} + b\underline{B} \cdot \underline{C} \\ \underline{C} \cdot (a\underline{A} + b\underline{B}) &= a\underline{C} \cdot \underline{A} + b\underline{C} \cdot \underline{B} \end{aligned}$$

5.) Die transponierte Matrix

Für eine Matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

ist die **transponierte Matrix** definiert durch

$$\underline{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

d.h. \underline{A}^T entsteht aus \underline{A} durch Vertauschen der Zeilen- und Spaltenindices. Das ist gleichbedeutend damit, die Matrixelemente, also die Einträge der Matrix, an der Matrixdiagonalen — die Diagonale von der linken oberen zur rechten unteren Ecke, auf der die **Matrixdiagonalelemente** A_{11}, A_{22}, A_{33} stehen — zu spiegeln.

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, Vektoren \vec{x}, \vec{y} und alle Matrizen $\underline{A}, \underline{B}$ gilt:

$$\begin{aligned} (\underline{aA} + \underline{bB})^T &= \underline{aA}^T + \underline{bB}^T \\ (\underline{A} \cdot \underline{B})^T &= \underline{B}^T \cdot \underline{A}^T \quad \text{Beachte Vertauschung der Reihenfolge!} \\ (\underline{A}^T)^T &= \underline{A} \\ (\vec{x} \bullet \underline{Ay}) &= (\underline{A}^T \vec{x} \bullet \vec{y}) \end{aligned}$$

Man nennt Matrizen \underline{A} , die $\underline{A}^T = \underline{A}$ erfüllen, **symmetrisch**.

6.) Orthogonale Matrizen, Drehungen, Spiegelungen

Eine Matrix \underline{D} heißt **orthogonal**, wenn sie die Bedingung

$$\underline{D}^T \underline{D} = \mathbf{1} = \underline{D} \underline{D}^T$$

erfüllt. Dabei ist $\mathbf{1}$ die **Einheitsmatrix** (oder 1-Matrix),

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es gilt $\mathbf{1} \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot \mathbf{1} = \underline{A}$ für jede Matrix \underline{A} .

Eine Matrix \underline{D} ist orthogonal genau dann, wenn für alle Vektoren \vec{x}, \vec{y} gilt:

$$(D\vec{x} \bullet D\vec{y}) = (\vec{x} \bullet \vec{y}).$$

D.h. eine orthogonale Matrix entspricht einer linearen Abbildung der Menge der Vektoren des \mathbb{R}^3 , die **Längen von Vektoren** und **Winkel zwischen Vektoren unverändert läßt**. Dies entspricht dem Verhalten von (starrten) Drehungen um eine Achse, oder von Spiegelungen.

Ein Beispiel ist die Matrix $\underline{D}(3, \theta)$, die eine Drehung um die \vec{e}_3 -Achse um den Winkel θ beschreibt:

$$\underline{D}(3, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

7.) Bahnkurven

Für $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ mit $t_0 < t_1$ ist (t_0, t_1) ein offenes, reelles Intervall.

Eine Abbildung

$$\vec{r}: (t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix}$$

heißt eine **Bahnkurve**. Dabei ist der Parameter t üblicherweise ein Zeitparameter.

Von Bahnkurven möchte man Ableitungen bilden, um Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Bahnkurve zu ermitteln. Dafür müssen die **Koordinatenfunktionen** $t \mapsto r_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$) der Bahnkurve genügend oft stetig differenzierbar sein. Wir nehmen an, dass die Koordinatenfunktionen immer wenigstens C^2 sind, also 2-mal stetig differenzierbar. Es lassen sich also für alle $t \in (t_0, t_1)$ die erste und die zweite Ableitung der r_j bilden, und diese Ableitungen sind auch stetige Funktionen.

In der Physik schreibt man für die Zeitableitung gerne einen Punkt über die entsprechende Größe (das geht auf Newton zurück). Also

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r}_1(t) \\ \dot{r}_2(t) \\ \dot{r}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}r_1(t) \\ \frac{d}{dt}r_2(t) \\ \frac{d}{dt}r_3(t) \end{pmatrix}$$

Diese Definition der Zeitableitung einer Bahnkurve stimmt auch überein mit der der Ableitung einer vektorwertigen Funktion: Es gilt

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\Delta t}(\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)) - \dot{\vec{r}}(t) \right\| = 0$$

für alle $t \in (t_0, t_1)$. Man definiert die erste Zeitableitung

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$$

als die **Geschwindigkeit** der Bahnkurve, und die zweite Zeitableitung

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t)$$

als die **Beschleunigung** der Bahnkurve. (Wobei zu beachten ist, dass dies sich auf die Beschreibung der Bahnkurve in gewählten Koordinaten, d.h. in der Standard-ONB des \mathbb{R}^3 bezieht.)