Prof. Dr. R. Verch
Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2017/18

Musterlösungen A-Teil-Aufgaben

(A.1)

(i) Das dritte Newtonsche Gesetz bezieht sich auf Systeme von N Massenpunkten, die — über innere Kräfte — gegenseitig miteinander wechselwirken können. Es besagt

$$\sum_{n=1}^{N} \vec{F}_{(n)}{}^{I} = \vec{0}\,,$$

d.h. die Summe über die inneren Kräfte des Teilchensystems ist gleich null, wobei:

$$\vec{F}_{(n)}{}^{I} = \vec{0} \quad \text{Kraft, die von den übrigen Teilchen auf Teilchen } n \text{ ausgeübt wird}$$

Wenn die innerern Kräfte 2-Teilchen-Kräfte sind, d.h.

$$\vec{F}_{(n)}{}^{I} = \sum_{k \neq n} \vec{F}_{(n)k}{}^{I}$$

mit $\vec{F}_{(n)k}{}^{I}$ = Kraft, die vom k-ten Teilchen auf das n-te Teilchen ausgeübt wird, und: $\vec{F}_{(n)k}{}^{I}$ hängt nur von Positionen und Geschwindigkeiten der beiden beteiligten Teilchen ab, dann besagt das dritte Newtonsche Gesetz, dass das Prinzip "Actio = Reactio" gilt, d.h.

$$\vec{F}_{(n)k}{}^{I} = -\vec{F}_{(k)n}{}^{I}$$

Anwendung: Bei Abwesenheit äußerer Kräfte folgt die Erhaltung des Gesamtimpuls, d.h. $\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{0}$. Dies bildet die Grundlage für die Geschwindigkeitsänderung durch Rückstoß wie z.B. beim Raketenantrieb.

In einem System, bei dem die 2-Teilchen-Kräfte zentral wirken, d.h.

$$\vec{F}_{(n)k}{}^{I} = f_{(n)k} \cdot (\vec{r}_{(n)} - \vec{r}_{(k)})$$

(entlang Verbindungslinie der Teilchen), folgt aus dem dritten Newtonschen Gesetz auch die Erhaltung des gesamten inneren Drehimpuls des Teilchensystems und damit, bei Abwesenheit äußerer Kräfte, die Erhaltung des Gesamtdrehimpuls. Daraus folgt z.B., dass die Planetenbewegung in einer zeitlich konstanten Bahnebene erfolgt.

(ii) Eine Galilei-Transformation ist eine Transformation von Bezugssystemen (ungestrichenes und gestrichenes BS), die bzgl. der zugehörigen Raum- und Zeitkoordinaten die folgende Form hat:

$$\begin{aligned} \vec{r}\,' &= D\vec{r} + \vec{v}t + \vec{r}_0 \\ t' &= t + t_0 \end{aligned}$$

Dabei sind: $D =$ orthogonale 3×3 Drehmatrix, $\vec{v}$, $\vec{R}_0$ sind dreidimensionale Vektoren, t_0 ist eine reelle Zahl. Diese Transformationen bedeuten, dass das gestrichene BS sich gegenüber dem ungestrichenen mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegen kann, die Koordinatenachsen der BSe gegeneinander (konstant) gedreht sein können und der räumliche Nullpunkt der BSe (konstant) verschoben sein kann. Der Zeitnullpunkt des gestrichenen BS kann gegenüber dem ungestrichenen BS konstant verschoben sein.

Galileitransformationen sind die genau die Transformationen, die Lösungen der freien Newtonschen Bewegungsgleichung im ungestrichenen BS auf Lösungen der freien Newtonschen Bewegungsgleichung im gestrichenen abbilden (wenn absolute Zeitparametrisierung vorausgesetzt wird), d.h.

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2}{dt'^2}\vec{r}\,'(t') = \vec{0}$$

Daraus ergibt sich, dass Inertialsysteme (genau) durch Galilei-Transformationen wieder auf Inertialsysteme transformiert werden. D.h. das ungestrichene BS ist genau dann ein Inertialsystem, wenn das gestrichene BS ein Inertialsystem ist, und beide BS durch eine Galilei-Transformation wie oben beschrieben zusammenhängen.

(A.2)

(i) Das d'Alembertsche Prinzip bezieht sich auf Systeme aus N Massenpunkten, die holonomen Zwangsbedingungen unterworfen sind. Die Zwangsbedingungen sind beschrieben durch

$$\Phi_\nu(\underset{\sim}{r}, t) = 0, \quad \underset{\sim}{r} = (\vec{r}_{(1)}, \ldots \vec{r}_{(N)}) \quad \nu = 1, \ldots, k$$

Die Bewegungsgleichungen lauten allgemein

$$\dot{\underset{\sim}{p}}(t) = \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{Z}(t)$$

- $\underset{\sim}{p}(t)$ zusammengefasste Impulse der Massenpunkte
- $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}(t, \underset{\sim}{r}, \dot{\underset{\sim}{r}})$ äußere Kraft
- $\underset{\sim}{Z}(t)$ Zwangskraft

Die Fläche der Zwangsbedingungen zur Zeit t ist

$$\mathcal{F}_t = \{\underset{\sim}{r} : \Phi_\nu(\underset{\sim}{r}, t) = 0 \ \ (\nu = 1, \ldots, k)\}$$

Das d'Alembertsche Prinzip besagt, dass die Zwangskräfte gegenüber virtuellen Verrückungen des Systems keine Arbeit leisten, was genauer bedeutet:

$$\underset{\sim}{Z}(t) \cdot \underset{\sim}{\xi} = 0$$

für alle Tangentialvektoren $\underset{\sim}{\xi}$ an die Fläche der Zwangsbedingunen $\mathcal{F}_t$ zur Zeit t. Das Skalarprodukt wird gebildet zwischen Vektoren in $\mathbb{R}^{3N}$. Die Bewegungsgleichungen werden dann zu den Lagrange-Gleichungen erster Art, d.h.

$$(\dot{\underset{\sim}{p}}(t) - \underset{\sim}{F}) \cdot \underset{\sim}{\xi} = 0$$

für alle Tangentialvektoren $\underset{\sim}{\xi}$ an die Fläche der Zwangsbedingunen $\mathcal{F}_t$ zur Zeit t im Punkt $\underset{\sim}{r}(t)$.