Prof. Dr. R. Verch
Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2017/18

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 13

Aufgabe 13.1 [wird nicht korrigiert]

Es sei $R > 0$ fest vorgegeben und O_R sei die Oberfläche eines Zylinders mit Radius R,

$$O_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\}\,.$$

Ermitteln Sie für zwei Punkte P_0 und P_1 auf O_R die Kurve minimaler Länge (Geodäte), die beide Punkte verbindet. Drücken Sie dafür die Länge einer C^2-Kurve $\gamma : [0,1] \to O_R$, die P_0 und P_1 verbindet, als Wirkungsfunktional $S_L(\gamma)$ zu einer geeigneten "Lagrangefunktion" aus. Geben Sie die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen an, und bestimmen Sie die Lösungen unter Berücksichtigung der Randbedingungen $\gamma(t = 0) = P_0$, $\gamma(t = 1) = P_1$. Führen Sie dazu Zylinderkoordinaten ein und wählen Sie $P_0 = (R, 0, 0)$ und $P_1 = (R\cos\varphi_1, R\sin\varphi_1, z_1)$. Interpretieren Sie anhand von Skizzen die Geodäten geometrisch, besonders für die folgenden Fälle: (i) $z_1 = 0$, (ii) $\phi_1 = 0$, (iii) $\pi/2 < \phi_1 < \pi$, $z_1 > 0$. Was lässt sich hinsichtlich der Eindeutigkeit der Geodäten sagen?

Aufgabe 13.2 [diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte]

Teilchen der Masse m bewege sich in einer räumliche Dimension (ohne weitere Zwangsbedingungen) im eindimensionalen harmonischen Oszillatorpotential gegeben durch

$$U(q) = \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

mit einer Konstanten $\omega > 0$.

(a) Geben Sie die Lagrangefunktion $L(q, \dot{q})$ für die Bewegung des Massenpunkts an.

(b) Prüfen Sie, dass die Lagrangefunktion die Auflösungsbedingung erfüllt.

(c) Drücken Sie $\dot{q} = \dot{q}(q, p)$ als Funktion von q und dem kanonisch konjugierten Impuls p aus.

(d) Geben Sie die Hamiltonfunktion $H(q, p)$ an. Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und geben Sie deren allgemeine Lösung an. Wieviele Integrationskonstanten sind für eine konkrete Lösung festzulegen?

/...2

(e) Es sei (q_0, p_0) ein Punkt im Phasenraum und $t \mapsto (q(t), p(t))$ sei eine Integralkurve des Hamiltonschen Vektorfeldes mit $(q(0), p(0)) = (q_0, p_0)$. Zeigen Sie, dass die Integralkurve (auch genannt Phasenraumkurve) eine Ellipse ist. Berechnen Sie deren Mittelpunkt sowie Größe und Richtung der Halbachsen. Skizzieren Sie die Umlaufrichtung.
(Hinweis: Es ist ratsam, zunächst die Kurve $(\xi(t), \eta(t)) = (\sqrt{m\omega}q(t), p(t)/\sqrt{m\omega})$ anstelle von $(q(t), p(t))$ zu betrachten.)

Aufgabe 13.3 [wird nicht korrigiert]

Für eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei f'' ohne Nullstelle, d.h. f' ist invertierbar. Es sei $g(z) = f'^{-1}(z)$, $f^*(x) = xf'(x) - f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ und

$$(\mathcal{L}f)(z) = f^*(g(z)) = zg(z) - f(g(z)) \quad (z \in f'(\mathbb{R}))$$

heißt die *Legendretranformierte* von f.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(\mathcal{L}f)(y) = f(y)$ gilt.

(b) Auf $\mathbb{R}^2$ sei die C^2-Funktion $T(q, u) = \frac{1}{2}m(q)u^2$ gegeben, wobei $m(q) > 0$ für alle $q \in \mathbb{R}$. Ausserdem sei $V(q)$ eine beliebige reelle C^2-Funktion auf $\mathbb{R}$. Berechnen Sie für festgehaltenes q die Legendretransformierte $H(q, p)$, mit $p = \frac{\partial}{\partial u}L(q, u)$, der Funktion

$$u \mapsto L(q, u) = T(q, u) - V(q)\,.$$

Aufgabe A.2 [Klausurvorbereitung — wird nicht korrigiert]

Beantworten Sie die folgenden Fragen möglichst knapp und treffend. Verwenden Sie Formeln und Skizzen, wenn dies der Erklärung dient oder in der Aufgabenstellung verlangt wird. Erklären Sie die Symbole, die Sie verwenden. Vermeiden Sie zu lange Antworttexte (nicht mehr als eine Seite pro Frage).

/...3

(i) Erläutern Sie das d'Alembertsche Prinzip. Für welche Arten von Zwangsbedingungen ist es anwendbar? Wie lauten die Bewegungsgleichungen in diesem Fall?

(ii) Erläutern Sie den Begriff des effektiven Potentials. Für welche Arten von mechanischen Systemen wird es eingeführt? Wie lautet die Bewegungsgleichung im effektiven Potential? Wie lässt sich anhand des Verlaufs des effektiven Potential auf das Vorhandensein (oder nicht) von gebundenen Bahnen des Systems schließen? Skizzieren Sie geeignete Beispiele.

Abgabe am Mi., 24.01.2018, vor der Vorlesung