Prof. Dr. R. Verch
Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 12

Aufgabe 12.1 [wird nicht korrigiert]

Ein System aus N Massenpunkten mit den Massen m_j $(j = 1, \ldots, N)$ sei gegeben, das k unabhängigen, holonomen Zwangsbedingungen $\Phi_\nu(\underset{\sim}{r}, t) = 0$ unterliegt $(\underset{\sim}{r} = (\vec{r}_{(1)}, \ldots, \vec{r}_{(N)}) \in \mathbb{R}^{3N})$. Es sei eine Koordinatisierungsabbildung $\underset{\sim}{x}_t : Q \to \mathcal{F}_t$ zu jeder Zeit t gegeben, wobei $\mathcal{F}_t$ die Fläche der Zwangsbedingungen zur Zeit t sein soll. Die kinetische Energie einer Bahnkurve $\underset{\sim}{r}(t) = \underset{\sim}{x}_t(q(t))$, wobei $q(t)$ eine Kurve im Raum Q der generalisierten Koordinaten ist, wird gegeben durch

$$T_{\text{kin}}(t) = T(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j} m_j |\vec{w}_{(j)}(t, q, \dot{q})|^2 , \quad \text{mit}$$

$$\vec{w}_{(j)}(t, q, \dot{q}) = \sum_{n=1}^{f} \dot{q}_n \frac{\partial}{\partial q_n} \vec{x}_{(j)t}(q) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{x}_{(j)t}(q) ,$$

wobei die Argumente (nach ausgeführten Differentiationen) für $q = q(t)$ und $\dot{q} = \dot{q}(t) = \frac{d}{dt} q(t)$ auszuwerten sind.

Die Teilchen bewegen sich in einem — möglicherweise zeitabhängigen — Potential $U(t, \underset{\sim}{r})$.

Die Lagrangefunktion des Systems ist gegeben durch

$$L(t, q, \dot{q}) = T(t, q, \dot{q}) - U(t, \underset{\sim}{x}_t(q)) .$$

(1) Zeigen Sie, dass unter der Annahme $\underset{\sim}{r}(t) = \underset{\sim}{x}_t(q(t))$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(A) $\underset{\sim}{r}(t)$ erfüllt die Lagrangegleichungen 1. Art, d.h. es gilt $\underset{\sim}{r}(t) \in \mathcal{F}_t$ zu allen Zeiten t und

$$(\, \dot{\underset{\sim}{p}}(t) + \nabla_{\underset{\sim}{r}} U(t, \underset{\sim}{r}(t)) \,) \bullet \underset{\sim}{\xi} = 0$$

gilt für alle $\underset{\sim}{\xi} \in T_{\underset{\sim}{r}(t)} \mathcal{F}_t$ (Tangentialvektoren an $\mathcal{F}_t$ im Punkt $\underset{\sim}{r}(t)$).

(B) Die Kurve $q(t)$ im Raum Q der verallgemeinerten Koordinaten erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichungen, oder Lagrangegleichungen 2. Art:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_n} L(t, q(t), \dot{q}(t)) \right) - \frac{\partial}{\partial q_n} L(t, q(t), \dot{q}(t)) = 0$$

für alle $n = 1, \ldots, f$.

/...2

Dabei werden erst die partiellen Differentiationen ausgeführt unter der Annahme, dass q und $\dot{q}$ unabhängige Variablen in $\mathbb{R}^f$ sind, und anschließend entlang der Kurve der generalisierten Koordinaten ausgewertet, d.h. für $q = q(t)$, $\dot{q} = \dot{q}(t) = \frac{d}{dt}q(t)$. Die totale Zeitableitung bezieht sich auf alle auftretenden t-Variablen.

(2) Zeigen Sie im Fall, dass keine Zwangbedingungen vorliegen, die Äquivalenz der Lagrangegleichungen 2. Art zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen.

Aufgabe 12.2 [diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte]

Ein homogenes (idealisiert unendlich dünnes) Seil der Gesamtmasse m und Länge ℓ rutscht reibungsfrei über die Kante eines Tisches ab. Die Bewegung erfolgt dabei senkrecht zur Tischkante.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf: (i) indem Sie eine Lagrangefunktion für des System angeben und die Euler-Lagrange-Gleichungen bilden; (ii) unter Verwendung einer Kräftegleichung.

(b) Es sei h die Höhe des Tisches. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingung, dass zur Zeit $t = 0$ das Seil losgelassen wird, wobei ein Stück der Länge $\ell_0 < \ell$ ($\ell_0 < h$) vom Tisch herunterhängt. Zu welcher Zeit t_B erreicht das untere Seilende den Boden? (Unterscheiden Sie die Fälle $h > \ell$ und $h \leq \ell$).

Aufgabe 12.3 [wird nicht korrigiert]

Zwei Massenpunkte mit den Massen m_1 und m_2 seien durch eine masselosen Faden der Länge ℓ verbunden, der durch ein Loch in einer Tischplatte geführt wird. Der herabhängende Massenpunkt m_2 kann sich unter dem Einfluss der Schwerkraft nur in vertikaler Richtung bewegen, der andere Massenpunkt kann (ohne weitere Einschränkung, abgesehen von der Verbindung durch den Faden) auf der Tischplatte reibungsfrei gleiten. Die Schwerkraft wirkt senkrecht zur Tischplatte.

(a) Welcher Typ von Zwangsbedingungen liegt hier vor und wieviele Freiheitsgrade hat das System?

(b) Wählen Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten und geben Sie eine Lagrangefunktion für das System an.

(c) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen. Überlegen Sie, ob es Erhaltungsgrößen des Systems gibt.

(d) Diskutieren Sie, für welche Anfangsbedingungen bzw. Bedingungen an m_1 und m_2 (i) m_2 zu allen Zeiten in Ruhe bleibt, (ii) m_2 nach endlicher Zeit in Ruhe bleibt, (iii) m_1 nach endlicher Zeit in Ruhe bleibt.

Aufgabe A.1 [Klausurvorbereitung — wird nicht korrigiert]

Beantworten Sie die folgenden Fragen möglichst knapp und treffend. Verwenden Sie Formeln und Skizzen, wenn dies der Erklärung dient oder in der Aufgabenstellung verlangt wird. Erklären Sie die Symbole, die Sie verwenden. Vermeiden Sie zu lange Antworttexte (nicht mehr als eine Seite pro Frage).

/...3

(i) Erläutern Sie das Prinzip "Actio = Reactio", d.h. das 3. Newtonsche Gesetz, und geben Sie Beispiele für Situationen, wo das Prinzip Anwendung findet.

(ii) Was ist eine Galilei-Transformation? Wodurch ist Sie gekennzeichnet? In welchem Zusammenhang stehen Galilei-Tranformationen und Inertialsysteme?

Abgabe am Mi., 17.01.2018, vor der Vorlesung