Prof. Dr. R. Verch
Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 11

Aufgabe 11.1 [diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte]
Betrachten Sie eine "Perle auf einem kreisförmigen Draht", d.h. ein Massenpunkt mit Masse m, der an einen Kreis gebunden ist und sich darauf (reibungsfrei) bewegen kann. Spezieller wird hier noch angenommen, dass der Kreis einen festen Radius $R > 0$ hat, sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω "stehend" um die $\vec{e}_3$-Achse dreht, und dass ein äußeres homogenes Schwerefeld $\vec{g} = -g\vec{e}_3$ besteht. Dabei ist g eine positive Konstante (in geeigneten Einheiten).

(a) Die Fläche der Zwangsbedingungen zur Zeit t kann beschrieben werden als

$$\mathcal{F}_t = \{\vec{r} = \vec{r}_t \in \mathbb{R}^3 : \vec{r}^{\,T} = (R\sin(\theta)\cos(\omega t), R\sin(\theta)\sin(\omega t), -R\cos(\theta))\,,\ \ -\pi < \theta \leq \pi\}$$

Geben sie zugehörige Zwangsbedingungen an, ausgedrückt durch 2 Funktionen $\Phi_1(\vec{r}, t)$ und $\Phi_2(\vec{r}, t)$ so, dass die Fläche der Zwangsbedingungen genau durch die Bedingungen $\Phi_\nu(\vec{r}, t) = 0$ $(\nu = 1, 2)$ beschrieben wird.

(b) Überprüfen Sie die Unabhängigkeit der Zwangsbedingungen.

(c) Nehmen Sie an, dass die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des "Drahts" nicht konstant ist, sondern gegeben ist durch eine Funktion $\omega(t)$. Die Winkelposition zur festgelegten Anfangszeit t_0 sei φ_0 und die Anfangs-Winkelgeschwindigkeit bei t_0 sei ω_0. Wie kann die Fläche $\mathcal{F}_t$ der Zwangsbedingungen für $t > t_0$ in diesem Fall beschrieben werden? Wie lauten zugehörige Zwangsbedingungs-Funktionen?

(d) Im Fall konstanter Winkelgeschwindigkeit kann die Bahnkurve $\vec{r}(t) = \vec{x}(\theta(t))$ des Massenpunkts beschrieben werden durch eine zeitabhängige Winkelfunktion $\theta(t)$, wobei

$$\vec{x}(\theta(t))^T = (R\sin(\theta(t))\cos(\omega t), R\sin(\theta(t))\sin(\omega t), -R\cos(\theta(t)))\,.$$

Drücken Sie die Bewegungsgleichung des Massenpunkts als eine Differentialgleichung für $\theta(t)$ aus, wobei Sie davon ausgehen, dass die Zwangskraft $\vec{Z}(t)$ zu jeder Zeit t normal auf $\mathcal{F}_t$ steht (senkrecht zu $\partial\vec{x}/\partial\theta(\theta(t))$).

/...2

Aufgabe 11.2 [wird nicht korrigiert]

Es sei ein starrer Körper gegeben, der aus drei Massenpunkten mit den festen Abständen a_{12}, a_{23} und a_{31} besteht (a_{ij} = Abstand von Massenpunkt m_i zu Massenpunkt m_j).

(a) Geben Sie Zwangsbedingungs-Funktionen $\Phi_\nu(\underset{\sim}{r}, t)$, $\nu = 1, 2, 3$, $\underset{\sim}{r} = (\vec{r}_{(1)}, \vec{r}_{(2)}, \vec{r}_{(3)}) \in \mathbb{R}^{3\cdot 3}$ an, die den starren Körper beschreiben.

(b) Prüfen Sie die Zwangsbedingungen auf Unabhängigkeit.

(c) Zeigen Sie: Die Fläche der Zwangsbedingungen $\mathcal{F}_t$ des starren Körpers (als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{3\cdot 3}$) zur Zeit t kann identifiziert werden mit

$$\mathcal{F}_t = \{(R, \vec{y}) : R \text{ orthogonale Drehmatrix}\,,\ \vec{y} \in \mathbb{R}^3\}$$

(zeitunabhängig weil die Zwangsbed. zeitunabhängig sind) indem die möglichen Konfigurationen des starren Körpers im Raum beschrieben werden durch

$$\underset{\sim}{x}(R, \vec{y}) = (R\vec{r}_{(1)} + \vec{y}, R\vec{r}_{(2)} + \vec{y}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{3\cdot 3}$$

wobei $\vec{r}_{(1)}$, $\vec{r}_{(2)}$, $\vec{r}_{(3)} = \vec{0}$ eine beliebig gewählte Ausgangslage der Massenpunkte des starren Körpers ist so, dass $\vec{r}_{(3)} = \vec{0}$.

Abgabe bis Mi., 10.01.2018, vor der Vorlesung