Prof. Dr. R. Verch

Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2017/18

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 10

Aufgabe 10.1 [wird nicht korrigiert]

Acht (punktartig idealisierte) Massen seien an den Ecken eines rechtwinkligen Würfels der Kantenlänge 2m starr angeordnet. Der Würfel sei im Ursprung eines (körperfesten) kartesischen Koordinatensystems zentriert, die Koordinaten-Längeneinheit betrage 1m. Die Massen an den Punkten mit den (x, y, z)-Koordinaten $(1, 1, 1)$ und $(-1, -1, -1)$ sollen jeweils 20kg betragen, die an den übrigen Eckpunkten des Würfels jeweils 5kg.

(a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts der Massenanordnung.

(b) Bestimmen Sie den Trägheitstensor (bezogen auf den Schwerpunkt und bzgl. der zugrundeliegenden Koordinatenrichtungen) für die Massenanordnung.

(b) Ermitteln Sie die Hauptträgheitsmomente (die Eigenwerte des Trägheitstensors) und die Hauptträgheitsachsen (die Eigenvektoren des Trägheitstensors).

Aufgabe 10.2 [diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte]

Ein Rad sei bzgl. eines körperfesten Koordinatensystems beschrieben durch die Massenverteilung

$$\tilde{\varrho}(x, y, z) = \begin{cases} \varrho_0, & \text{falls } r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2 \text{ und } -a \leq z \leq a\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $0 < r < R$ und $a > 0$ vorgegebene Längen sind, und $\varrho_0 > 0$ eine konstante Massendichte. Hier seien die Längen folgendermaßen gewählt: $R = 0,6$m, $r = 0,5$m, $a = 0,1$m. Das Rad habe eine Masse von 20kg. Das Rad befinde sich anfangs auf einer Höhe $h = 10$m über dem Erdboden in Ruhe. Es rolle dann eine schräge Bahn bis zum Erdboden hinunter. Anschließend rollt es auf dem (ebenen) Erdboden weiter. Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich der Schwerpunkt des Rades dabei fortbewegt.

Hinweis: Es wird angenommen, dass das Rad rollt ohne zu gleiten, und dass Rollreibung vernachlässigbar ist. Weiter wird angenommen, dass das Rad senkrecht auf der Unterlage steht und die Bewegung effektiv in einer Ebene erfolgt, die zum Erdboden und zur Drehachse des Rades senkrecht verläuft. Das Problem kann insgesamt auf eine Bewegung in 2 räumlichen Dimensionen reduziert werden.

/...2

Aufgabe 10.3 [wird nicht korrigiert]

Es sei der Trägheitstensor $J = (J_{k\ell})$ eines starren Körpers definiert bezüglich eines körperfesten Bezugssystems $(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3)$, das im Schwerpunkt des starren Körpers zentriert ist. Der Trägheitstensor $J' = (J'_{k\ell})$ sei bezüglich eines körperfesten Bezugssystems $(\vec{\eta}_1{}', \vec{\eta}_2{}', \vec{\eta}_3{}')$ definiert, das gegenüber $(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3)$ starr verschoben ist, also $\vec{\eta}_j{}' = \vec{\eta}_j + \vec{a}$ mit einem festen Vektor $\vec{a}$. (D.h. das Bezugssystem $(\vec{\eta}_1{}', \vec{\eta}_2{}', \vec{\eta}_3{}')$ ist nicht im Schwerpunkt des starren Körpers zentriert.) Zeigen Sie, dass der *Satz von Steiner* gilt:

$$J'_{k\ell} = J_{k\ell} + M(||\vec{a}||^2 \delta_{k\ell} - a_k a_\ell)\,,$$

wobei M die Gasamtmasse des starren Körpers ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 03.01.2018, vor Beginn des Übungsseminars.