Prof. Dr. R. Verch
Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 6.1 [Diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte.]
Zwei idealisiert punktartige Massen m und M bewegen sich unter dem Einfluss einer gegenseitigen konservativen Zentralkraft mit dem Potential $U(r)$, $r = ||\vec{r}||$, wobei $\vec{r}$ der Vektor der Relativbewegung ist.

(a) Der Drehimpuls einer finiten Bahnkurve $\vec{r}(t)$ sei $\vec{\ell} = \ell \vec{e}_3$, $\ell > 0$. Zeigen Sie, dass für die Perihelverschiebung der Bahnkurve die (in der VL ohne Beweis angegebene) Formel

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\ell}{r^2 [E - U_{\mathrm{eff},\ell}(r)]^{1/2}} \, dr$$

gültig ist. Dabei ist E die Gesamtenergie der Bahnkurve und $U_{\mathrm{eff},\ell}(r)$ ist das effektive Potential.

Hinweis: In der Vorlesung wurde für das Newtonsche Potential eine Differentialgleichung angegeben für $\tilde{r}(\varphi)$, den Bahnradius in Abhängigkeit vom Polarwinkel φ. Argumentieren Sie analog für ein allgemeines Potential und ermitteln Sie daraus eine Differentialgleichung für den Polarwinkel in Abhängigkeit des Bahnradius.

(b) Betrachten Sie das Zentralpotential

$$U(r) = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \quad (r > 0)\,,$$

wobei A und B positive reelle Konstanten (in geeigneten Einheiten) sind, und berechnen Sie die Perihelverschiebung $\Delta\varphi$ in Abhängigkeit von A und B.

/...2

Aufgabe 6.2 [wird nicht korrigiert]

Zwei idealisiert punktartige Massen m und M bewegen sich unter dem Einfluss einer gegenseitigen konservativen Zentralkraft mit dem Potential $U(r)$ ($r = ||\vec{r}||$, wobei $\vec{r}$ der Vektor der Relativbewegung ist) gegeben durch

$$U(r) = -\frac{C_1}{r^2} + C_2 \cos(\varrho r)$$

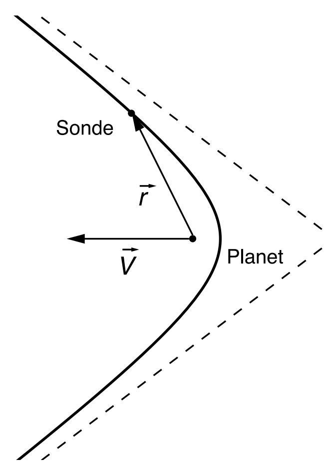
mit positiven Konstanten C_1, C_2 und ϱ (in geeigneten Einheiten).

(a) Je nach Wert des Drehimpulses ℓ ($\ell > 0$ in geeigneten Einheiten) hat das effektive Potential $U_{\text{eff},\ell}(r)$ einen unterschiedlichen Verlauf, wobei es 3 qualitativ unterschiedliche Fälle gibt. Wodurch sind diese Fälle gekennzeichnet? Skizzieren Sie die Graphen von $U_{\text{eff},\ell}(r)$ in den 3 Fällen.

(b) Untersuchen Sie in den 3 Fällen aus (a), ob bzw. für welche Werte der Gesamtenergie E der Betrag r des Vektors der Relativbewegung dem Wert 0 beliebig nahe kommen kann.

(c) Untersuchen Sie in den 3 Fällen aus (a), ob bzw. für welche Werte der Gesamtenergie E es finite Bahnkurven gibt, und wo diese lokalisiert sind.

Aufgabe 6.3 [wird nicht korrigiert]



Mit den bisherigen technischen Mitteln der Raumfahrt ist die Beschleunigung von Raumsonden durch das *swing-by* Verfahren von größter Wichtigkeit, damit Raumsonden innerhalb weniger Jahre die äußeren Planeten erreichen oder das Sonnensystem verlassen können. Bei dem swing-by Verfahren fliegt eine Raumsonde nahe an einem Planeten vorbei und wird durch dessen Schwerefeld relativ zur Sonne beschleunigt. Für die Betrachtung der Bewegung der Sonde wird die Anziehungskraft der Sonne (und der anderen Planeten) auf die Sonde vernachlässigt. Im Ruhesystem des betrachteten Planeten beschreibt die Bahn der Sonde dann eine Hyperbel. Die asymptotischen Geschwindigkeiten der Sonde *im Ruhesystem des Planeten* seien $\vec{w}_-$ (vor dem Vorbeiflug) und $\vec{w}_+$ (nach dem Vorbeiflug), wie bei der Streuung im Laborsystem. Der Planet habe die Masse m_2. Die Sonde habe die Masse m_1 ($= \mu$ da m_2 extrem viel größer ist als m_1) und *im Ruhesystem des Planeten* die asymptotische einlaufende Energie E sowie den Drehimpuls $\vec{\ell}$.

/...3

Der Planet habe *im Ruhesystem der Sonne* die Geschwindigkeit $\vec{V}$; für die hier relevanten Zeitskalen kann $\vec{V}$ als konstant angenommen werden. Der Winkel α wird definiert durch

$$\vec{w}_+ \bullet \vec{V} = ||\vec{w}_+||V\cos(\alpha)\,, \qquad V = ||\vec{V}||\,.$$

Hier wird die symmetrische Situation betrachtet, in der gilt (siehe Skizze):

$$\vec{w}_- \bullet \vec{V} = -||\vec{w}_-||V\cos(\alpha)\,.$$

(a) Es sei $w = ||\vec{w}_+||$. Warum gilt $||\vec{w}_-|| = w$? Berechnen Sie $||\vec{w}_-||$ aus den gegebenen Größen.

(b) Zeigen Sie, dass $\cos(\alpha) = 1/\epsilon$ mit $\epsilon = \sqrt{1 - E/U_0}$, $U_0 = -\kappa^2 m_1/(2\ell^2)$ mit $\ell = ||\vec{\ell}||$. Eine Skizze kann dabei hilfreich sein.

(c) Die asymptotischen Geschwindigkeiten der Sonde *im Ruhesystem der Sonne* seien $\vec{v}_\pm$. Zeigen Sie $||\vec{v}_+||^2 - ||\vec{v}_-||^2 = 4wV/\epsilon > 0$. Was gilt, wenn $\vec{V}$ durch $-\vec{V}$ ersetzt wird?

(d) Argumentieren Sie, dass man bereits ohne Rechnung folgern kann, dass die Energie der Sonde im Ruhesystem der Sonne nicht erhalten ist.

Abgabe bis Do., 23.11.2017, 12:00 Uhr, Postfach Prof. Verch im ITP