
Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1 [diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte]
Ein punkartiges Teilchen mit Masse m bewege sich unter dem Einfluss einer Zentralkraft der Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k \cdot \vec{r} \quad (\vec{r} \in \mathbb{R}^3),$$

wobei $k > 0$ (in geeigneten physikalischen Einheiten) eine Konstante ist. Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen nach:

- (a) Die Energie und der Drehimpuls des Teilchens sind Erhaltungsgrößen.
- (b) Die Bahn des Teilchens liegt in einer festen (zeitunabhängigen) Ebene und der Verbindungsvektor $\vec{r}(t)$ vom Koordinatenursprung zum Teilchen überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
- (c) Die möglichen Bahnkurven des Teilchens sind (eventuell entartete) Ellipsen mit Mittelpunkt bei $\vec{r} = \vec{0}$.
- (d) Die Umlaufzeiten aller Bahnkurven sind gleich.
- (e) An den Punkten mit dem größten Abstand vom Bahnmittelpunkt (Apozentren) ist die Geschwindigkeit des Teilchens am geringsten.

Aufgabe 5.2 [wird nicht korrigiert]
Zwei idealisiert punkartige Massen m und M bewegen sich unter dem Einfluss einer gegenseitigen konservativen Zentralkraft mit dem Potential $U(r)$, $r = |\vec{r}|$, wobei $\vec{r}$ der Vektor der Relativbewegung ist.

Der *Runge-Lenz-Vektor* der Bahnkurve der Relativbewegung wird definiert als

$$\vec{A} = \mu \dot{\vec{r}} \times \vec{\ell} + \mu U(r) \vec{r}.$$

Dabei ist μ die reduzierte Masse des Zweiteilchensystems und $\vec{\ell}$ der Drehimpuls der Bahnkurve.

/...2

(a) Zeigen Sie für den Fall des *Newtonschen Potentials*

$$U(r) = -\frac{\kappa}{r} \quad (r > 0, \quad \kappa \text{ eine positive Konstante in geeign. Einheiten}),$$

dass $\vec{A}$ für Lösungen der Bewegungsgleichung zeitlich konstant ist.

- (b) Interpretieren Sie $\vec{A}$ für finite Bahnkurven geometrisch und erläutern Sie, weshalb zeitlich konstantes $\vec{A}$ bedeutet, dass keine Periheldrehung auftritt.
- (c) Zeigen Sie, dass i.a. für Potentiale $U(r)$, die nicht von der Form des Newtonschen Potentials sind, der Runge-Lenz-Vektor $\vec{A}$ nicht zeitlich konstant ist.

Aufgabe 5.3

[wird nicht korrigiert]

- (a) Ein Planet sei vereinfacht beschrieben als eine Kugel mit Radius R und homogener Massenverteilung der Gesamtmasse M . Zeigen Sie, dass das von dem Planeten im Außenraum hervorgerufene Gravitationsfeld übereinstimmt mit dem Gravitationsfeld, das eine idealisiert im Mittelpunkt des Planeten punktförmig konzentrierte Masse M erzeugen würde.
- (b) Nehmen Sie an, dass die Massendichte des Planeten beschrieben wird durch eine stetige Funktion $\varrho(r) \geq 0$, wobei $r \in [0, R]$ der Abstand vom Mittelpunkt des Planeten ist. Gilt die Aussage, die in (a) gezeigt werden soll, dann auch?
- (c) Nehmen Sie an, dass der Außenraum einer leeren Kugel mit dem Radius R mit einer sphärisch symmetrischen Massenverteilung (mit Massendichte $\varrho(r) \geq 0$, wobei $r > R$ der Abstand vom Mittelpunkt der Hohlkugel) erfüllt ist ("Hohlwelt"). Welches Gravitationsfeld ergibt sich im Innenraum der Kugel?

Abgabe bis Mi., 15.11.2017, vor der Vorlesung